

The National Library of Australia
Document Delivery
Document Delivery
35 Stirling Highway
WA 6009 Crawley Australia

Customer No: 174909
Date of Order: **11/04/2011**
Date of Shipping: **14/04/2011**
Orderer: **ARIEL: ariel-lib@uwa.edu.au ; ILL email:**
Department:
Cost Centre:
Order No: **VDX_653115**
Shipping method: **eMail**
docdel@library.uwa.edu.au

STANDARD

Journal: L'Éclairage Électrique
Citations: v:Volume 16 i: Supp p:5¿14, 53¿59, 106¿112 1898
Author: Liénard, A.
Title: Champ électrique et magnétique produit par une charge électrique concentrée
ISSN: unknown

This work was copied under licence from the Copyright Agency Limited (CAL).
A licence is required from CAL for the making of further copies by any means.

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE D'ÉLECTRICITÉ

DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. D'ARSONVAL

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE,
MEMBRE DE L'INSTITUT.

D. MONNIER

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE
DES ARTS ET MANUFACTURES.

A. CORNU

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
MEMBRE DE L'INSTITUT.

H. POINCARÉ

PROFESSEUR A LA SORBONNE,
MEMBRE DE L'INSTITUT.

J. BLONDIN

PROFESSEUR AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

G. LIPPMANN

PROFESSEUR A LA SORBONNE,
MEMBRE DE L'INSTITUT.

A. POTIER

PROFESSEUR A L'ÉCOLE DES MINES,
MEMBRE DE L'INSTITUT.

TOME XVI

3^e TRIMESTRE 1898



PARIS

GEORGES CARRÉ ET C. NAUD, ÉDITEURS

3, RUE RACINE, 3

L'Éclairage Électrique

REVUE HEBDOMADAIRE D'ÉLECTRICITÉ

DIRECTION SCIENTIFIQUE

A. CORNU, Professeur à l'École Polytechnique, Membre de l'Institut. — A. D'ARSONVAL, Professeur au Collège de France, Membre de l'Institut. — G. LIPPMANN, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — D. MONNIER, Professeur à l'École centrale des Arts et Manufactures. — H. POINCARÉ, Professeur à la Sorbonne, Membre de l'Institut. — A. POTIER, Professeur à l'École des Mines, Membre de l'Institut. — J. BLONDIN, Professeur agrégé de l'Université.

CHAMP ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE

PRODUIT PAR UNE CHARGE ÉLECTRIQUE CONCENTRÉE EN UN POINT ET ANIMÉE
D'UN MOUVEMENT QUELCONQUE

Admettons qu'une masse électrique en mouvement de densité ρ et de vitesse u en chaque point produit le même champ qu'un courant de conduction d'intensité $u\rho$. En conservant les notations d'un précédent article ⁽¹⁾ nous obtiendrons pour déterminer le champ, les équations

$$\frac{1}{4\pi} \left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz} \right) = \rho u_x + \frac{df}{dt} \quad (1)$$

$$V^2 \left(\frac{dh}{dy} - \frac{dg}{dz} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{d\alpha}{dt} \quad (2)$$

avec les analogues déduites par permutation tournante et en outre les suivantes

$$\rho = \left(\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} \right) \quad (3)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0. \quad (4)$$

De ce système d'équations on déduit facilement les relations

$$\left(V^2 \Delta - \frac{d^2}{dt^2} \right) f = V^2 \frac{d\rho}{dx} + \frac{d}{dt} (\rho u_x) \quad (5)$$

$$\left(V^2 \Delta - \frac{d^2}{dt^2} \right) \alpha = 4\pi V^2 \left[\frac{d}{dz} (\rho u_y) - \frac{d}{dy} (\rho u_z) \right] \quad (6)$$

⁽¹⁾ La théorie de Lorentz, *L'Éclairage Électrique*, t. XIV, p. 417. α, β, γ , sont les composantes de la force magnétique et f, g, h , celles du déplacement dans l'éther.

Soient maintenant quatre fonctions ψ, F, G, H définies par les conditions

$$\left(V^2 \Delta - \frac{d^2}{dt^2} \right) \psi = -4\pi V^2 \rho. \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(V^2 \Delta - \frac{d^2}{dt^2} \right) F &= -4\pi V^2 \rho u_x \\ \left(V^2 \Delta - \frac{d^2}{dt^2} \right) G &= -4\pi \rho u_y \\ \left(V^2 \Delta - \frac{d^2}{dt^2} \right) H &= -4\pi V^2 \rho u_z \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

On satisfera aux conditions (5) et (6) en prenant

$$4\pi f = -\frac{d\psi}{dx} - \frac{1}{V^2} \frac{dF}{dt} \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}. \quad (10)$$

Quant aux équations (1) à (4), pour qu'elles soient satisfaites, il faudra que, en plus de (7) et (8), on ait la condition

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0. \quad (11)$$

Occupons-nous d'abord de l'équation (7). On sait que la solution la plus générale est la suivante :

$$\psi = \int \frac{\rho \left[x', y', z', t - \frac{r}{V} \right]}{r} d\omega' \quad (12)$$

r étant la distance d'un point M' (x', y', z') de l'élément de volume $d\omega'$, au point M (x, y, z) où nous voulons avoir la valeur de ψ à l'instant t , et la densité ρ au point M' étant prise, non à l'instant t , mais au temps $t - \frac{r}{V}$, et l'intégrale étant étendue à tout l'espace (1).

Supposons que nous n'ayons qu'une masse électrisée occupant un volume Ω . En dehors ρ est nul et les éléments correspondants de l'intégrale sont nuls. Il semble donc qu'il suffise de réduire le champ d'intégration au volume Ω de la masse électrique. Mais il faut remarquer qu'aux différents points de l'espace la valeur de ρ doit être prise à des époques différentes.

Décrivons de M comme centre une sphère S

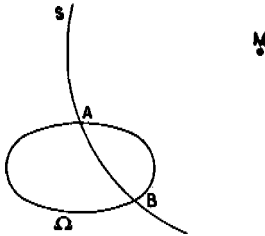


Fig. 1.

de rayon quelconque r (fig. 1), et soit Ω la position correspondante de la masse électrisée, c'est-à-dire sa position à l'instant $t - \frac{r}{V}$. Si S et Ω ne se rencontrent pas, les éléments de l'intégrale seront nuls pour tous les points de S , mais si une région AB de S se trouve à l'intérieur de Ω , les éléments de l'intégrale seront différents de 0 pour tous les points de AB . Le champ d'intégration sera donc le volume engendré par AB , lorsque l'on fait varier le rayon de la sphère S et en même temps la position de Ω .

Soit e la charge totale de Ω que nous supposons de très petites dimensions, de manière que u ait sensiblement la même valeur en tous les points et que dans tout le champ d'intégration r ait sensiblement même valeur et même direction. Pour un accroissement dr

de r , le déplacement correspondant de Ω , dans la direction normale à la sphère et vers l'intérieur, sera égal à $-\frac{dr}{V} u \cos(u, r)$, si on prend comme direction positive pour r , celle de Ω vers M .

Par suite, tandis que le volume élémentaire réellement balayé par AB sera égal à aire $AB \times dr$, le volume balayé par rapport à Ω ne sera égal qu'à :

$$\text{aire } AB \times dr \left[1 - \frac{u}{V} \cos(u, r) \right].$$

Par suite, le champ d'intégration sera égal non pas à Ω , mais à $\frac{\Omega}{1 - \frac{u}{V} \cos(u, r)}$, en prenant pour u et r une valeur moyenne, et on aura pour ρ la valeur

$$\psi = \int \frac{\rho}{r} d\omega' = \frac{1}{r} \int \rho d\omega' = \frac{e}{r \left[1 - \frac{u}{V} \cos(u, r) \right]}$$

Nous pouvons maintenant supposer toute la charge concentrée en un point. Je représenterai par P (fig. 2) sa position à l'instant t ,

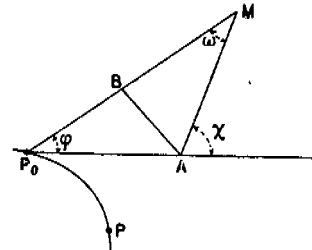


Fig. 2.

par $P_0(x_0, y_0, z_0)$ sa position à l'instant $t - \theta$, θ étant tel que $P_0M = r = V\theta$. x_0, y_0, z_0 seront des fonctions de $(t - \theta)$ et on aura :

$$u_x = \frac{\partial x_0}{\partial t} \quad u_y = \frac{\partial y_0}{\partial t} \quad u_z = \frac{\partial z_0}{\partial t}.$$

Alors $u \cos(u, r)$ sera égal à $\frac{1}{r} [u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0) + u_z(z - z_0)]$ et on aura finalement

$$\psi = \frac{e}{\left[r - \frac{1}{V} \sum u_x(x - x_0) \right]} \tag{12}$$

Portons sur la tangente en P_0 à la trajectoire du point P , dans le sens du mouvement,

(1) LORENTZ, Archives néerlandaises, 1892.

une longueur P_0A égale à $u\theta$. A représenterait la position du point P_0 au temps t si à partir du temps $t - \theta$ il avait conservé un mouvement rectiligne uniforme. Menons AM et soit B la projection de A sur P_0M . On aura immédiatement

$$P_0B = \Sigma(u_x \theta) \frac{x - x_0}{r} = \frac{\theta}{r} \Sigma u_x (x - x_0) = \frac{1}{V} \Sigma u_x (x - x_0)$$

et par suite (12) peut s'écrire

$$\psi = \frac{e}{(BM)}. \tag{12'}$$

Les équations (8) ne diffèrent de (7) que par le changement de ρ en $\rho u_x, \rho u_y, \rho u_z$. Pour résoudre (7) nous n'avons d'ailleurs fait aucune supposition sur la constance ou la variation de e avec le temps, et au point de vue algébrique la valeur (12) de ρ serait variable, même si e était variable, à condition de prendre sa valeur à l'instant $t - \theta$. Nous obtiendrons donc les solutions de (8) en changeant simplement dans (12), e en $e u_x, e u_y, e u_z$, ce qui donne

$$F = \frac{e u_x}{\left[r - \frac{1}{V} \Sigma u_x (x - x_0) \right]} \tag{13}$$

et deux expressions analogues pour G et H .

Il faut maintenant calculer $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$, d'après les équations (9) et (10), mais auparavant nous devons vérifier que la condition (11) est satisfaite et pour cela calculer les dérivées $\frac{d\psi}{dt}, \frac{dF}{dx}, \frac{dG}{dy}, \frac{dH}{dz}$.

ψ, F, G, H , dépendent de x directement et par l'intermédiaire de θ . En effet, θ est déterminé par la condition que P_0M soit égal à $V\theta$, d'où la relation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = V^2\theta^2. \tag{14}$$

Différentions en supposant y, z et t constants, mais x et par suite θ variables : en supprimant un facteur 2 il vient

$$(x - x_0) dx + d\theta \Sigma (x - x_0) \left(- \frac{\partial x_0}{\partial \theta} \right) = V^2\theta d\theta,$$

ou, puisque

$$\begin{aligned} - \frac{\partial x_0}{\partial \theta} &= \frac{\partial x_0}{\partial t} = u_x \\ (x - x_0) dx &= [V^2\theta - \Sigma u_x (x - x_0)] d\theta = \\ V \left[V\theta - \frac{1}{V} \Sigma u_x (x - x_0) \right] d\theta &= (BM) V d\theta \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{x - x_0}{V(BM)}. \tag{15}$$

On obtiendrait de même $\frac{d\theta}{dy}$ et $\frac{d\theta}{dz}$. Pour avoir $\frac{d\theta}{dt}$, il suffira de différentier (14) en laissant x, y, z constants, mais se rappelant que x_0, y_0, z_0 sont des fonctions de $t - \theta$.

$$-(dt - d\theta) \Sigma u_x (x - x_0) = V^2\theta d\theta.$$

d'où

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{- \frac{1}{V} \Sigma u_x (x - x_0)}{V\theta - \frac{1}{V} \Sigma u_x (x - x_0)} = - \frac{(P_0B)}{(BM)} \tag{16}$$

et

$$\frac{d(t - \theta)}{dt} = \frac{V\theta}{V\theta - \frac{1}{V} \Sigma u_x (x - x_0)} = \frac{(P_0M)}{(BM)}$$

Soit W l'accélération de P à l'instant $(t - \theta)$. On pourra écrire les différentes égalités suivantes :

$$\begin{aligned} - \frac{\partial u_x}{\partial \theta} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} = w_x, \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{dV\theta}{d\theta} = V \\ \frac{\partial (P_0B)}{\partial \theta} &= \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial \theta} \Sigma u_x (x - x_0) = - \frac{1}{V} \Sigma w_x (x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{V} + \Sigma u_x^2 = \frac{u^2}{V} - \frac{1}{V} \Sigma w_x (x - x_0) \\ \frac{\partial (BM)}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (r - P_0B) = \frac{1}{V} [V^2 - u^2 + \Sigma w_x (x - x_0)] \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -V \frac{(P_0B)}{(BM)} \\ \frac{d(P_0B)}{dt} &= \frac{d(P_0B)}{d(t - \theta)} \frac{d(t - \theta)}{dt} = - \frac{\partial P_0B}{\partial \theta} \frac{d(t - \theta)}{d\theta} \\ &= - \frac{1}{V} [u^2 - \Sigma w_x (x - x_0)] \frac{(P_0M)}{(BM)}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{e} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{I}{BM} = -\frac{I}{(BM)^2} \frac{d(BM)}{dt} \\ &= -\frac{I}{(BM)^2} \frac{d}{dt} [r - P_0 B] \\ &= \frac{I}{V(BM)^2} \left\{ V^2(P_0 B) - [u^2 - \Sigma w_x(x - x_0)](P_0 M) \right\}, \\ \frac{4\pi}{e} \frac{dF}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{u_x}{BM} = \frac{d\theta}{dx} \left[\frac{\partial u_x}{\partial \theta} - \frac{u_x}{(BM)^2} \frac{\partial BM}{\partial \theta} \right] \\ &\quad - \frac{u_x}{(BM)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[r - \frac{I}{V} \Sigma w_x(x - x_0) \right] \\ &= \frac{-(x - x_0)}{V^2(BM)^2} \left\{ V(BM) w_x + u_x [V^2 - u^2 \right. \\ &\quad \left. + \Sigma w_x(x - x_0)] \right\} + \frac{u_x^2}{V(BM)^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{e} \Sigma \frac{dF}{dx} &= -\frac{\Sigma w_x(x - x_0)}{V(BM)^2} - [V^2 - u^2 + \Sigma w_x(x - x_0)] \\ &\quad \frac{\Sigma u_x(x - x_0)}{V^2(BM)^2} + \frac{u^2}{V(BM)^2} = -\frac{V(P_0 B)}{(BM)^2} \\ &\quad + \frac{(P_0 M) [u^2 - \Sigma w_x(x - x_0)]}{V(BM)^2} \\ &= \frac{[V^2 - u^2 + \Sigma w_x(x - x_0)] \left[x - x_0 - u_x \frac{P_0 M}{V} \right] - w_x (P_0 M) (BM)}{V^2(BM)^2} \quad (17) \\ \frac{\alpha}{e} &= \frac{[V^2 - u^2 + \Sigma w_x(x - x_0)] [u_y(\zeta - \zeta_0) - u_z(\eta - \eta_0)] + V(BM) [w_y(\zeta - \zeta_0) - w_z(\eta - \eta_0)]}{V^2(BM)^2} \quad (18) \end{aligned}$$

Remarquons que $u_x \frac{P_0 M}{V}$ est égal à θu_x et représente la projection de $P_0 A$ sur l'axe des x . Par suite $x - x_0 - u_x \frac{P_0 M}{V}$ représente la projection de AM sur O_x . Géométriquement en représentant par \bar{D} le déplacement et par \bar{H} la force magnétique, on pourra écrire

$$\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{[V^2 - u^2 + \bar{w} \overline{P_0 M}] \bar{A} \bar{M} - (P_0 M) (BM) \bar{w}}{4\pi V^2 (BM)^2} e \quad (17') \\ \bar{H} &= \frac{[V^2 - u^2 + \bar{w} \overline{P_0 M}] \bar{u} \cdot \overline{P_0 M} + V(BM) \bar{w} \overline{P_0 M}}{V^2 (BM)^2} e. \quad (18') \end{aligned}$$

D'une manière générale nous représentons par $\bar{X} \bar{Y}$ le produit géométrique scalaire des deux vecteurs \bar{X} , \bar{Y} , c'est-à-dire la quantité $XY \cos(X, Y)$ et par $\bar{X} \bar{Y}$ le produit vectoriel, c'est-à-dire un vecteur égal à $XY \sin(X, Y)$ et perpendiculaire aux deux vecteurs \bar{X} et \bar{Y} , dans un sens tel que l'on amène la projection de \bar{Y} sur un plan normal à \bar{X} à coïncider avec la direction du produit vec-

c'est-à-dire précisément $-\frac{4\pi}{e} \frac{d\psi}{dt}$. La relation (11) est donc établie.

Il ne reste plus qu'à calculer les valeurs de f et de α données par (9) et (10).

$$\begin{aligned} \frac{4\pi f}{e} &= -\frac{d}{dx} \frac{I}{BM} - \frac{I}{V^2} \frac{d}{dt} \frac{u_x}{BM} = \frac{I}{(BM)^2} \\ &\quad \left[\frac{\partial(BM)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dx} + \frac{\partial(BM)}{\partial x} \right] - \frac{I}{V^2(BM)} \frac{du_x}{dt} \\ &\quad + \frac{u_x}{V^2(BM)^2} \frac{dBM}{dt} \\ &= \frac{[V^2 - u^2 + \Sigma w_x(x - x_0)](x - x_0)}{V^2(BM)^2} - \frac{u_x}{V(BM)^2} \\ &\quad - \frac{w_x}{V^2(BM)} \frac{d(t - \theta)}{dt} \quad (17) \\ &\quad + \frac{u_x}{V^2(BM)^2} \left\{ -V \frac{(P_0 B)}{(BM)} + \frac{u^2 - \Sigma w_x(x - x_0)}{V(BM)} P_0 M \right\} \end{aligned}$$

toriel par une rotation de 90° dans le sens direct (soit ici de droite à gauche, d'après la manière dont les formules (1) et (2) supposent les axes orientés).

La formule (18') montre tout d'abord que la force magnétique \bar{H} est normale à $\overline{P_0 M}$. Si nous considérons la sphère de centre P_0 passant par M , pour tous les points de cette sphère, le point P_0 jouera le même rôle que pour M . Donc à l'instant t , le flux de force magnétique à travers cette sphère sera nul.

Cherchons de même le flux de déplacement à travers la même sphère. Pour avoir la composante de \bar{D} normale à la sphère, c'est-à-dire suivant $\overline{P_0 M}$, il suffit dans l'expression de \bar{D} de remplacer $\bar{A} \bar{M}$ et \bar{W} par leurs projections (BM) et $W \cos(w, r)$ sur le rayon. Par suite

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{[V^2 - u^2 + \bar{w} \overline{P_0 M}] (BM) - (P_0 M) (BM) w \cos(w, r)}{4\pi V^2 (BM)^2} e \\ &= \frac{V^2 - u^2}{4\pi V^2 (BM)^2} e = \frac{V^2 - u^2}{4\pi r^2 [V - u \cos \varphi]^2} e \end{aligned}$$

en appelant φ l'angle AP_0M . Prenons comme élément de surface dS de la sphère la zone limitée par les deux cônes de demi-ouverture φ et $\varphi + d\varphi$. On aura

$$\int D_n dS = \int_0^\pi \frac{V^2 - u^2 e}{4\pi r^2 [V - u \cos \varphi]^2} 2\pi r^2 \sin \varphi d\varphi$$

$$= \frac{V^2 - u^2}{2u} e \left[\frac{-1}{V - u \cos \varphi} \right]_0^\pi = e.$$

Ce résultat était d'ailleurs une conséquence forcée de (3).

Les deux vecteurs D et H sont rectangulaires et le rapport de H à la projection D_t de D sur le plan normal à P_0M est constant et égal à $4\pi V$.

Pour avoir D_t il suffit de remplacer dans (18') les vecteurs \overline{AM} et \overline{W} par leurs composantes normales à P_0M ,

$$\overline{D}_t = \frac{[\dots] \overline{AB} - (P_0M)(BM) \overline{w}_t}{4\pi V^2 (BM)^2}.$$

D'ailleurs

$$\overline{u} \cdot \overline{P_0M} = -\overline{P_0M} \cdot \overline{u} = -\frac{1}{\theta} \overline{P_0M} \cdot \overline{P_0A} = \frac{1}{\theta} \overline{P_0M} \cdot \overline{AB}$$

car on peut remplacer le deuxième facteur $-\overline{P_0A}$ par sa projection \overline{AB} sur un plan normal au premier. Le produit vectoriel considéré est donc égal numériquement à $\frac{(P_0M)}{\theta} (AB)$ et a la direction de AB tourné d'un angle droit autour de P_0M dans le sens direct.

De même

$$V \overline{w} \cdot \overline{P_0M} = -V \overline{P_0M} \cdot \overline{w} = -V \overline{P_0M} \cdot \overline{w}_t$$

produit vectoriel dont la valeur numérique est $-V (P_0M) w_t$, et la direction est celle de \overline{w}_t tourné d'un angle droit autour de P_0M dans le sens direct.

Ces relations établies, il résulte immédiatement de la comparaison des valeurs de H et de D_t , que H est égal à $4\pi V D_t$ et a la direction de \overline{D}_t tourné d'un angle droit autour de P_0M dans le sens direct, c'est-à-dire de droite à gauche pour un observateur ayant les pieds en P_0 et la tête en M .

H étant perpendiculaire aux deux compo-

santes D_t et D_n de D le sera à fortiori à D lui-même.

Dans le cas où le mouvement de P est rectiligne et uniforme, les formules (17) et (18) se simplifient. D'abord les termes en W disparaissent, en outre les points P et A coïncident et il est possible d'exprimer les valeurs de \overline{D} et \overline{H} d'après la position actuelle P ou A , sans introduire P_0 . En effet on a d'abord

$$\overline{u} \cdot \overline{P_0M} = \overline{u} \cdot \overline{P_0A} + \overline{u} \cdot \overline{AM} = \overline{u} \cdot \overline{AM}$$

car le produit vectoriel $\overline{u} \cdot \overline{P_0A}$ est nul, ses deux facteurs ayant même direction. En outre, si on appelle ω et χ l'angle P_0MA et l'angle de AM avec le prolongement de P_0A , on aura les égalités

$$\frac{\sin \omega}{\sin \chi} = \frac{P_0A}{P_0M} = \frac{u}{V}$$

$$BM = AM \cos \omega = AM \sqrt{1 - \sin^2 \omega}$$

$$= AM \sqrt{1 - \frac{u^2 \sin^2 \chi}{V^2}}$$

et (17') et (18') deviennent

$$D = \frac{V(V^2 - u^2)}{4\pi (AM)^2 [V^2 - u^2 \sin^2 \chi]^{\frac{3}{2}}} e \quad (17'')$$

$$H = \frac{V(V^2 - u^2) u \sin \chi}{(AM)^2 [V^2 - u^2 \sin^2 \chi]^{\frac{3}{2}}} e \quad (18'')$$

le premier vecteur étant dirigé suivant AM et le second suivant la perpendiculaire commune à AM et u .

Les équations (17') et (18') se réduisent encore à (17'') et (18'') lorsque l'on suppose les points P_0 et M infiniment voisins et que l'on se borne aux valeurs principales.

Au contraire, à grande distance du point P_0 , ce sont les termes en w qui sont les plus importants, et D se réduit sensiblement à sa composante normale à P_0M .

APPLICATIONS DES FORMULES PRÉCÉDENTES

I. Comme première application nous calculerons le champ électrique et magnétique produit par un circuit portant une charge de

densité linéaire constante et glissant sur lui-même avec une vitesse constante u .

Soit P un point du circuit C défini par la longueur S d'un arc de circuit comptée à

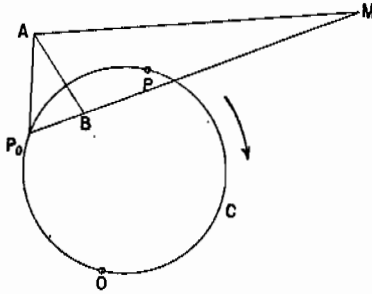


Fig. 3 (1).

partir d'une origine fixe O (fig. 3), dans le sens de la vitesse u . L'action de la charge ρds

d'un élément de longueur ds avoisinant le point P, dépend de sa position en P_0 (s_0) un temps θ avant.

En désignant toujours par x, y, z les coordonnées de M, par x_0, y_0, z_0 , celles de P_0 , supposées données en fonction de s_0, θ sera égal à $\frac{s-s_0}{u}$ et donné par la condition $V\theta = P_0M$ ou

$$\frac{V^2}{u^2}(s-s_0)^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2. \quad (19)$$

Les composantes de la vitesse u en P_0 seront $u \frac{dx_0}{ds_0}, u \frac{dy_0}{ds_0}, u \frac{dz_0}{ds_0}$, et celles de l'accélération seront $u \frac{d^2x_0}{ds_0^2} \frac{ds_0}{dt} = u^2 \frac{d^2x_0}{ds_0^2}$ et de même $u^2 \frac{d^2y_0}{ds_0^2}, u^2 \frac{d^2z_0}{ds_0^2}$, car u est constant.

Si on en tient compte on aura

$$d\alpha = \frac{u \left\{ V^2 - u^2 \left[1 - \Sigma \frac{d^2x_0}{ds_0^2} (x-x_0) \right] \right\} \left[\frac{dy_0}{ds_0} (z-z_0) - \frac{dz_0}{ds_0} (y-y_0) \right] + Vu^2 (BM) \left[\frac{d^2y_0}{ds_0^2} (z-z_0) - \dots \right]}{V^2 (BM)^3} \rho ds.$$

Mais

$$\frac{d(BM)}{ds_0} = \frac{d \left[r - \frac{u}{V} \Sigma \frac{dx_0}{ds_0} (x-x_0) \right]}{ds_0}$$

$$= -\frac{1}{r} \Sigma \frac{dx_0}{ds_0} (x-x_0) + \frac{u}{V} \left[1 - \Sigma \frac{d^2x_0}{ds_0^2} (x-x_0) \right]$$

car $\Sigma \frac{dx_0^2}{ds_0^2} = \frac{dx_0^2}{ds_0^2} + \frac{dy_0^2}{ds_0^2} + \frac{dz_0^2}{ds_0^2} = 1.$

Tirant $1 - \Sigma \frac{d^2x_0}{ds_0^2} (x-x_0)$ de cette équation et substituant dans l'expression de $d\alpha$ il vient

$$d\alpha = \frac{u \left\{ V^2 - \frac{Vu}{r} \Sigma \frac{dx_0}{ds_0} (x-x_0) - Vu \frac{d(BM)}{ds_0} \right\} \left[\frac{dy_0}{ds_0} (z-z_0) - \dots \right] + Vu^2 (BM) \left[\frac{d^2y_0}{ds_0^2} (z-z_0) - \dots \right]}{V^2 (BM)^3} \rho ds$$

$$= \left\{ \frac{u \left[\frac{dy_0}{ds_0} (z-z_0) - \dots \right]}{r(BM)} + \frac{u^2}{V} \frac{d}{ds_0} \frac{\frac{dy_0}{ds_0} (z-z_0) - \frac{dz_0}{ds_0} (y-y_0)}{BM} \right\} \frac{\rho ds}{BM^2}.$$

Pour avoir α il faut intégrer l'expression précédente le long du circuit complet, en se rappelant que s_0 est une fonction de s définie par (19); mais il est plus commode de changer de variable en prenant s_0 au lieu de s .

Différentiant (19) il vient

$$\frac{V^2}{u^2} (s-s_0) (ds-ds_0) = -\Sigma \frac{dx_0}{ds_0} (x-x_0) ds_0$$

ou puisque $\frac{V}{u} (s-s_0) = P_0M = r$

$$r(ds-ds_0) = -\frac{u}{V} \Sigma \frac{dx_0}{ds_0} (x-x_0) ds_0$$

ou

$$\frac{ds}{BM} = \frac{ds_0}{r}.$$

Le champ d'intégration par rapport à s_0 est évidemment le même que par rapport à s ; donc

$$\alpha = \int_c \left\{ \frac{u \left[\frac{dy_0}{ds_0} (z-z_0) - \dots \right]}{r^2 BM} + \frac{u^2}{Vr} \frac{d}{ds_0} \frac{\frac{dy_0}{ds_0} (z-z_0) - \frac{dz_0}{ds_0} (y-y_0)}{BM} \right\} \rho ds_0.$$

(1) Sur cette figure la droite P_0A devrait être tangente à l'arc OP_0 et la droite AB perpendiculaire à P_0M .

D'ailleurs $\frac{dr}{ds_0} = -\frac{1}{r} \Sigma \frac{dx_0}{ds_0} (x - x_0)$ et le deuxième terme de la parenthèse peut s'écrire

$$\frac{u^2}{V} \frac{d}{ds_0} \frac{\frac{dy_0}{ds_0} (\zeta - \zeta_0) - \dots}{r(BM)}$$

$$- \frac{u^2 \Sigma \frac{dx_0}{ds_0} (x - x_0)}{V r^3 (BM)} \left[\frac{dy_0}{ds_0} (\zeta - \zeta_0) - \dots \right]$$

et α devient

$$\alpha = \int_c \left\{ \frac{u \left[\frac{dy_0}{ds_0} (\zeta - \zeta_0) - \dots \right]}{r^3 (BM)} \right.$$

$$\left. \left[r - \frac{u}{V} \Sigma \frac{dx_0}{ds_0} (x - x_0) \right] + \frac{u^2}{V} \frac{d}{ds_0} \frac{\dots}{r(BM)} \right\} \rho ds_0$$

$$= \int_c \frac{\frac{dy_0}{ds_0} (\zeta - \zeta_0) - \frac{d\zeta_0}{ds_0} (\zeta - \zeta_0)}{r^3} u \rho ds_0$$

$$+ \int_c d \left\{ \frac{\rho u^2}{V} \frac{\frac{dy_0}{ds_0} (\zeta - \zeta_0) - \frac{d\zeta_0}{ds_0} (\zeta - \zeta_0)}{r(BM)} \right\}.$$

La seconde intégrale est nulle identiquement et le champ magnétique est le même que celui produit par un courant de conduction d'intensité $u\rho$.

De même, on trouverait pour $4\pi V^2 f$ la valeur

$$4\pi V^2 f = \int_c V^2 \frac{x - x_0}{r^3} \rho ds_0$$

$$+ \int_c d \frac{\rho u V (AM)}{r(BM)}.$$

Ici encore la deuxième intégrale est nulle et le champ électrique est le même que si le circuit était au repos.

II. Cherchons maintenant la perte d'énergie par radiation, et pour cela évaluons le flux d'énergie pendant le temps dt à travers la sphère de centre P_0 et de rayon $P_0 M$, que nous appellerons, pour simplifier, la position au temps t de l'onde émise par P_0 .

Si D_t est la composante de D dans le plan tangent à l'onde, le flux à travers l'élément dS est égal à $V^2 \overline{D_t} \overline{H} dS dt$. Mais D_t étant normal à H et égal à $\frac{H}{4\pi V}$, cette expression est

encore égale à

$$V \frac{1}{4\pi} H^2 dS dt = V 4\pi V D_t^2 dS dt$$

$$= \left(\frac{1}{8\pi} H^2 + 2\pi V^2 D_t^2 \right) dS V dt.$$

En intégrant par rapport à dS , on aurait le flux total qui passe de l'intérieur à l'extérieur de la surface d'onde.

Pendant le temps dt le rayon de la surface d'onde s'est accru de Vdt et l'espace balayé par cette surface contenait une énergie égale à

$$V dt \int \left[\frac{1}{8\pi} H^2 + 2\pi V^2 D^2 \right] dS = V dt$$

$$\int \left[\frac{1}{8\pi} H^2 + 2\pi V^2 D_t^2 \right] dS + V dt \int 2\pi V^2 D_n^2 dS$$

Finalement la quantité d'énergie qui a traversé la surface d'onde considérée comme mobile est égale à

$$- V dt \int 2\pi V^2 D_n^2 dS.$$

Mais D_n est infiniment petit du second ordre lorsque r est infiniment grand du premier ordre, c'est-à-dire lorsque t croît indéfiniment, θ variant en même temps pour que $t - \theta$ reste constant et que le point P_0 correspondant reste le même. Par suite, l'intégrale précédente est de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$ et tend vers zéro. Donc si nous considérons deux surfaces d'onde S et S' correspondant à une même valeur de t , mais à des valeurs de θ différentes, pour t croissant indéfiniment, l'énergie comprise entre ces deux surfaces d'onde tendra vers une valeur constante, et toute cette énergie étant entraînée à l'infini se trouvera perdue par radiation.

Pour faire le calcul, je supposerai d'abord que S et S' correspondent à des valeurs de θ infiniment peu différentes, θ et $\theta + d\theta$. La surface S' aura un rayon égal à $V(\theta + d\theta)$ et son centre sera non en P_0 , mais en P'_0 tel que $\overline{P'_0 P_0} = u d\theta$.

Par suite, un élément de volume compris entre ces deux surfaces sera égal à $dS [V d\theta - u \cos \varphi d\theta]$ et l'énergie comprise entre S et S'

sera égale à

$$dE = d\theta \int \left[\frac{1}{8\pi} H^2 + 2\pi V^2 D^2 \right] (V - u \cos \varphi) dS$$

Puisque nous ne cherchons que la valeur limite de dE pour r infiniment grand, nous ne devons conserver dans la parenthèse que les termes en $\frac{1}{r^2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{8\pi} H^2$

$$+ 2\pi V^2 D^2 = \frac{H^2}{4\pi} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4\pi}.$$

Pour simplifier, je prendrai l'axe des x parallèle à P_0A , c'est-à-dire à la direction de la vitesse en P_0 , et je prendrai Ox pour axe d'un système de coordonnées polaires r, φ, ψ . Par suite, en ne prenant dans α, β, γ que les termes en $\frac{1}{r}$, il vient

$$\frac{\alpha}{e} \frac{r}{V} = \frac{w_y \sin \varphi \sin \psi - w_z \sin \varphi \cos \psi}{[V - u \cos \varphi]^2}$$

$$\frac{\beta}{e} \frac{r}{V} = \frac{-[w_x \cos \varphi + w_y \sin \varphi \cos \psi + w_z \sin \varphi \sin \psi] u \sin \varphi \sin \psi + [V - u \cos \varphi] [w_z \cos \varphi - w_x \sin \varphi \sin \psi]}{[V - u \cos \varphi]^3}$$

$$\frac{\gamma}{e} \frac{r}{V} = \frac{[w_x \cos \varphi + \dots] u \sin \varphi \cos \psi + [V - u \cos \varphi] [w_x \sin \varphi \cos \psi - w_y \cos \varphi]}{[V - u \cos \varphi]^3}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{4\pi} [V - u \cos \varphi] dS &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4\pi} [V - u \cos \varphi] r^2 d\varphi \sin \varphi d\psi \\ &= \frac{e^2 V^2 \sin \varphi d\varphi d\psi}{4\pi [V - u \cos \varphi]^5} \left\{ \begin{aligned} &[w_x \cos \varphi + w_y \sin \varphi \cos \psi + w_z \sin \varphi \sin \psi]^2 u^2 \sin^2 \varphi \\ &+ 2u [w_x \cos \varphi + \dots] [V - u \cos \varphi] \{ w_x - \cos \varphi [w_x \cos \varphi + \dots] \} \\ &+ [V - u \cos \varphi]^2 \{ w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 - [w_x \cos \varphi + \dots]^2 \} \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{e^2 V^2 \sin \varphi d\varphi d\psi}{4\pi [V - u \cos \varphi]^5} \left\{ \begin{aligned} &-(V^2 - u^2) [w_x \cos \varphi + w_y \sin \varphi \cos \psi + w_z \sin \varphi \sin \psi]^2 \\ &+ 2u w_x [V - u \cos \varphi] [w_x \cos \varphi + \dots] \\ &+ [V - u \cos \varphi]^2 [w_x^2 + w_y^2 + w_z^2] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Il faut intégrer par rapport à ψ de 0 à 2π et par rapport à φ de 0 à π . Dans la première intégration les termes qui contiennent $\cos \psi$, $\sin \psi$ ou $\sin \psi \cos \psi$ disparaîtront, ceux qui contiennent $\cos^2 \psi$ ou $\sin^2 \psi$ se trouveront multipliés par π et les autres par 2π . Par suite

$$dE = d\theta \int_0^\pi \frac{e^2 V^2 \sin \varphi d\varphi}{4[V - u \cos \varphi]^5} \left\{ \begin{aligned} &-(V^2 - u^2) [2w_x^2 \cos^2 \varphi + w_y^2 \sin^2 \varphi + w_z^2 \sin^2 \varphi] \\ &+ 4u w_x [V - u \cos \varphi] \cos \varphi \\ &+ 2[V - u \cos \varphi]^2 (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) \end{aligned} \right\}$$

Pour intégrer je ferai le changement de variable

$$V - u \cos \varphi = x$$

d'où

$$u \sin \varphi d\varphi = dx$$

et

$$\cos \varphi = \frac{V - x}{u}.$$

Les nouvelles limites d'intégration seront

$$V - u \text{ et } V + u.$$

$$\begin{aligned} dE &= d\theta \frac{e^2 V^2}{4u} \int_{V-u}^{V+u} \frac{dx}{x^5} \left\{ \begin{aligned} &-(V^2 - u^2) \\ &[(2w_x^2 - w_y^2 - w_z^2) \frac{(V-x)^2}{u^2} + w_y^2 + w_z^2] \\ &+ 4V w_x x + 2x^2 (w_y^2 + w_z^2 - w_x^2) \end{aligned} \right\} \\ &= d\theta \frac{e^2 V^2}{4u^3} \int_{V-u}^{V+u} dx \left\{ \begin{aligned} &[2w_x^2 V^2 - (V^2 - u^2)(w_y^2 + w_z^2)] \\ &\left[\frac{-(V^2 - u^2)}{x^5} + \frac{2V}{x^4} \right] \\ &+ \frac{(V^2 + u^2)(w_y^2 + w_z^2) - 2V^2 w_x^2}{x^3} \end{aligned} \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

Or

$$\int_{V-u}^{V+u} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(V-u)^4} - \frac{1}{(V+u)^4} \right]$$

$$= \frac{2uV(V^2+u^2)}{(V^2-u^2)^4}$$

$$\int_{V-u}^{V+u} \frac{dx}{x^4} = \frac{2}{3} \frac{u(3V^2+u^2)}{(V^2-u^2)^3}$$

$$\int_{V-u}^{V+u} \frac{dx}{x^5} = \frac{2uV}{(V^2-u^2)^2}$$

et l'expression précédente devient, toutes déductions faites,

$$dE = d\theta \frac{2}{3} \frac{e^2}{V} \left[w^2_x \frac{V^6}{(V^2-u^2)^3} + (w^2_y + w^2_z) \frac{V^4}{(V^2-u^2)^2} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \frac{e^2}{V} d\theta \left[w^2 \frac{V^4}{(V^2-u^2)^2} + w^2 \cos^2(w, u) \frac{V^4 u^2}{(V^2-u^2)^3} \right]. \quad (21)$$

Lorsque u^2 est négligeable devant V^2 , on a plus simplement

$$dE = \frac{2}{3} \frac{e^2 w^2}{V} d\theta$$

expression donnée par Larmor (*Philosoph. Mag.*, t. XLIV, 1897, p. 503). Larmor la calcule simplement en évaluant l'énergie qui traverse une surface d'onde de rayon infini. Le procédé, admissible pour u négligeable, serait incorrect en thèse générale, car les ondes envoyées par la charge e ne sont pas concentriques, et une sphère qui est surface d'onde à un moment ne le sera plus l'instant suivant.

Supposons que la charge étant primitivement en repos et le champ invariable, on mette la charge en mouvement pour la ramener de nouveau au repos après un temps τ . Si pendant tout le mouvement la vitesse u est inférieure à V (comme nous l'avons du reste toujours supposé implicitement jusqu'ici), un temps t après la fin du mouvement, la perturbation sera concentrée entre deux sphères, l'une de rayon $V(\tau+t)$ ayant pour centre la position initiale et l'autre de rayon Vt ayant pour centre la position finale. A l'extérieur de

cette région le champ sera le même que primitivement et à l'intérieur il sera le même que si la charge avait toujours été au repos dans sa position actuelle. D'après le calcul précédent, l'énergie emportée à l'infini par la perturbation sera égale à $\int_0^\tau dE$ et essentiellement positive. Cette expression représente donc le travail total dépensé sur la charge pendant le mouvement. Mais il ne serait pas vrai de dire qu'à un instant quelconque le travail dépensé est égal à dE , car le travail est infiniment grand lorsque l'on suppose la charge concentrée en un point, mais la différence doit être une différentielle exacte d'une fonction (infinie) de u et w qui disparaît lorsque l'on part du repos pour revenir au repos.

Cherchons aussi l'impulsion totale de la force nécessaire pour produire le mouvement. Nous avons établi (*Écl. Élé.*, t. XIV, p. 45) que les projections sur les axes de l'impulsion pendant un temps quelconque, des forces développées par le champ sur les charges, étaient égales aux variations des intégrales

$$-\int (g_\gamma - h\beta) d\omega \quad -\int (h\alpha - f\gamma) d\omega \quad -\int (f\beta - g\alpha) d\omega.$$

Ici la quantité cherchée sera égale et de signe contraire. Or à l'instant initial α, β, γ sont nuls et les intégrales sont nulles. Il suffit donc d'avoir leurs valeurs à la fin du mouvement. Mais la charge n'étant plus alors soumise à aucune force, puisqu'elle est seule dans le champ, les intégrales ne varieront plus et nous pouvons chercher leurs valeurs pour t infini. Nous opérerons comme précédemment en cherchant d'abord la valeur des intégrales pour l'espace compris entre les deux surfaces d'onde S et S' .

$g_\gamma - h\beta$, etc..., représentent les composantes du produit vectoriel $\overline{D} \overline{H}$, qui est égal à la résultante des deux suivants $\overline{D}_t \overline{H}$ et $\overline{D}_n \overline{H}$. Pour la même raison que précédemment, le produit contenant D_n sera négligeable, et quant au premier, ainsi que nous l'avons vu, il sera égal à $\frac{H^2}{4\pi V}$ et dirigé suivant P_0M . Si

donc dI_x , dI_y , dI_z représentent les intégrales cherchées, leurs expressions ne différeront de celles de dE que par la suppression d'un facteur V et l'introduction sous le signe \int des facteurs $\cos \varphi$, $\sin \varphi \cos \psi$, $\sin \varphi \sin \psi$ qui représentent les cosinus directeurs de la droite $P_0 M$.

Occupons-nous d'abord de dI_x . $\frac{1}{V} \cos \varphi$ est égal $\frac{1}{u} \left(1 - \frac{x}{V}\right)$.

Appelons dE' la valeur que prendrait dE si on multipliait la quantité sous le signe \int par x , ce qui revient à changer dans l'équation (20) les intégrales

$$\int \frac{dx}{x^3}, \int \frac{dx}{x^2}, \int \frac{dx}{x^2}$$

dans les suivantes

$$\int \frac{dx}{x^4}, \int \frac{dx}{x^3}, \int_{V-u}^{V+u} \frac{dx}{x^2} = \frac{2u}{V^2 - u^2}.$$

On trouve facilement que $dE' = \frac{V^2 - u^2}{V} dE$ et par suite

$$\begin{aligned} dI_x &= \frac{1}{u} \left[dE - \frac{1}{V} dE' \right] = \frac{u}{V^2} dE \\ &= \frac{2}{3} e^2 u w^2 \left[1 + \frac{u^2 \cos^2(w, u)}{V^2 - u^2} \right] \frac{V d\theta}{(V^2 - u^2)^2}. \end{aligned}$$

Quant à I_y et I_z je dis qu'ils sont nuls. Prenons par exemple I_y . Ici comme nous introduisons un facteur $\sin \varphi \cos \psi$ qui contient ψ il faut le faire avant l'intégration par rapport à ψ . Dans cette intégration les termes en $\cos \varphi$, $\cos^3 \psi$, $\sin^2 \psi \cos \psi$, $\cos^2 \psi \sin \psi$, $\sin \psi \cos \psi$ disparaîtront et il ne restera que les termes contenant $\cos^3 \psi$, c'est-à-dire en laissant de côté les facteurs constants

$$\frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{[V - u \cos \varphi]^3} \left\{ \begin{aligned} &-2(V^2 - u^2) w_x w_y \cos \varphi \sin \varphi \\ &+ 2u w_x w_y [V - u \cos \varphi \sin \varphi] \end{aligned} \right\}$$

et l'identité à vérifier est, en introduisant un facteur $\frac{-u^2}{2V w_x w_y}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_u^V \frac{(Vu \cos \varphi - u^2) u^2 \sin^3 \varphi d\varphi}{[V - u \cos \varphi]^3} \\ &= \int_{V-u}^{V+u} \frac{(V^2 - u^2 - Vx)[- (V^2 - u^2) + 2Vx - x^2] dx}{x^3} \\ &= \int_{V-u}^{V+u} \left[\frac{-(V^2 - u^2)^2}{x^3} + \frac{3V(V^2 - u^2)}{x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{u^2 - 3V^2}{x} + \frac{V}{x^2} \right] dx \end{aligned}$$

ce qui se fait immédiatement en remplaçant les intégrales par les valeurs données.

Si on considère dI_x , dI_y , dI_z comme les composantes d'un vecteur $d\vec{I}$, on voit que $d\vec{I}$ sera égal à $d\vec{I}_x$ et aura la direction de O_x , c'est-à-dire de \vec{u} et par suite

$$d\vec{I} = \frac{2}{3} e^2 \vec{u} w^2 \left[1 + \frac{u^2 \cos^2(w, u)}{V^2 - u^2} \right] \frac{V d\theta}{(V^2 - u^2)^2} \quad (22)$$

cette expression est maintenant indépendante du choix particulier d'axes adoptés pour simplifier le calcul, et en prenant l'intégrale géométrique de $d\vec{I}$ pendant la durée du mouvement, on aura l'impulsion totale pendant ce temps de la force qui produit le mouvement. On voit qu'elle ne sera pas nulle en général.

Comme tout à l'heure pour dE , il faut remarquer que $d\vec{I}$ ne représentera pas l'impulsion élémentaire de la force qui agit sur la charge e , mais la différence (qui est infinie) sera la différentielle exacte d'une fonction de u et w qui disparaîtra lorsque l'on part du repos pour y revenir.

A. LIÉNARD,

Professeur à l'École des Mines de Saint-Etienne.

peut aussi manœuvrer G à la main par la manette F⁸.

La dérivation G' de G renferme un certain nombre de contacts de sûreté G₂, G₃, G₄, G₅, G₆, commandés : G₂ par le régulateur de vitesse H (fig. 28) ; G₃ et G₄, au haut et au bas de la course de la cabine, par ses taquets g₃, g₄ ; G₅ par le levier I, que son contrepoids I' abaisse dès que le câble A' de la cabine se relâche et G₆ par le conducteur de la cabine.

Le circuit dérivé 2 (fig. 30) comprend l'enroulement J d'un dash-pot électro-magnétique du levier K, dont le balai K' commande le rhéostat L de l'armature M, à contacts l, l,

et l₀, reliés par 3, 5 et 4 aux enroulements s₁, s₂ de l'inducteur de M de manière à pouvoir les introduire ou retrancher successivement du circuit n. Le contact l₁₁ est relié par 6 n au commutateur N₁, à plaques N₁, N₂, aboutissant à l'armature M par (n¹ 7 m) et (n² 8 m') et par n³ 9 au circuit principal 1. Le contact l₈ est relié au circuit dérivé 10. Quand ce circuit est fermé en F₄, son courant passe par (l₈, L, l₁₁, 6, n, N', n', 7, m, M m', 8, N₂, n₂ 9, F₈), ce qui met bien M en court-circuit par L.

(A suivre.)

G. RICHARD.

CHAMP ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE

PRODUIT PAR UNE CHARGE ÉLECTRIQUE CONCENTRÉE EN UN POINT ET ANIMÉE D'UN MOUVEMENT QUELCONQUE (1)

III. — Force exercée sur lui-même par un corps chargé, de très petites dimensions, et animé d'un mouvement de translation.

Soit *u* la vitesse du corps à l'instant *t*. Je prendrai Ox parallèle à cette direction. Soient P (ξ, γ, ζ) et M (x, y, z) deux points du corps (fig. 4). Je chercherai d'abord l'action d'une charge *de* aux environs du point P sur une charge *de'* aux environs de M.

Un temps θ auparavant, le point P était en P₀ de coordonnées

$$\begin{aligned} x_0 &= \xi - u\theta + \frac{1}{2} w_x \theta^2 \dots & y_0 &= \gamma + \frac{1}{2} w_y \theta^2 \dots \\ z_0 &= \zeta + \frac{1}{2} w_z \theta^2 \dots \end{aligned} \quad (23)$$

et à ce moment les composantes de la vitesse étaient

$$\begin{aligned} u_{0x} &= u - w_x \theta + \dots & u_{0y} &= -w_y \theta + \dots \\ u_{0z} &= -w_z \theta + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Déterminant θ par la condition que P₀M

$$\frac{dX}{d\theta d\theta'} = \frac{[V^2 - u_0^2 + \sum w_{0x}(x - x_0)] [x - x_0 - \theta u_{0x}] - w_x (P_0M) (BM)}{(BM)^3}$$

Nous ne chercherons que la valeur principale de *dX*. On serait d'abord amené à négliger dans l'expression de *dX* les termes en *n*

soit égal à *Vθ*, nous obtiendrons l'équation

$$\begin{aligned} V^2 \theta^2 &= (x - \xi)^2 + (y - \gamma)^2 + (z - \zeta)^2 + 2\theta u(x - \xi) \\ &+ \theta^2 u^2 - \theta^2 [w_x(x - \xi) + w_y(y - \gamma) + w_z(z - \zeta)] \\ &- \theta^3 u w_x + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

Si on considère PM comme infiniment petit, θ sera du même ordre que PM et les termes négligés au second membre de (25) seront d'ordre supérieur au troisième.

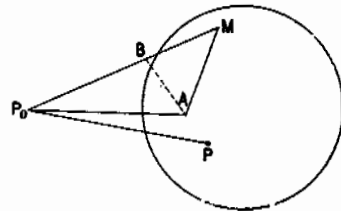


Fig. 4.

La vitesse de M étant parallèle à Ox, la composante *dX* suivant cette direction de la force exercée par *de* sur *de'* se réduira à $4\pi V^2 f d\theta$, (2) ou en remplaçant *f* par sa valeur (17)

(1) Voir *L'Éclairage Électrique* du 2 juillet, p. 5.

(2) Voir *L'Éclairage Électrique*, t. XIV, p. 456.

qui sont d'ordre supérieur devant ceux en $V^2 - u_0^2$ et dans ces termes à ne prendre que la valeur principale en faisant $u_0 = u$, et confondant pour le calcul de BM les points A et P dont la distance est égale à $\frac{1}{2} w \theta^2 + \dots$. Mais à ce degré d'approximation la valeur de dX' relative à l'action de M sur P sera égale et de signe contraire à dX , et dans l'intégration ces deux termes se détruiraient. Il faut donc calculer dX avec un degré d'approximation de plus, et pour cela garder les termes en w (mais qu'on pourra calculer au premier degré d'approximation) et calculer le terme $\frac{V^2 - u_0^2}{(BM)^3}$ en tenant compte de la différence entre u_0 et u et entre les points A et P.

D'après (24) u_0^2 est égal à $u^2 - 2\theta u w_x + \dots$

$$BM = r - \frac{1}{V} \sum u_{0x} (x - x_0) = V \theta - \frac{(u - \theta w_x) \left(x - \xi + \theta u - \frac{1}{2} w_x \theta^2 \right) - \theta w_y (y - \eta) - \theta w_z (\zeta - \zeta)}{V}$$

ou

$$V(BM) = (V^2 - u^2) \theta - u(x - \xi) + \theta \left[w_x (x - \xi) + w_y (y - \eta) + \dots \right] + \frac{3}{2} \theta^2 u w_x + \dots$$

Élevant au carré

$$V^2(BM)^2 = (V^2 - u^2) [(V^2 - u^2) \theta^2 - 2\theta u(x - \xi)] + u^2 (x - \xi)^2 + [(V^2 - u^2) \theta - u(x - \xi)] \{ 2\theta [w_x (x - \xi) + \dots] + 3\theta^2 u w_x \} + \dots$$

en nous bornant toujours au second degré d'approximation, c'est-à-dire en négligeant les termes du quatrième ordre puisque (BM) est du second.

Je remplace la première parenthèse par sa valeur $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (\zeta - \zeta)^2 - \theta^2 [w_x (x - \xi) + \dots] - \theta^2 u w_x$ tirée de l'équation (25).

$$V^2(BM)^2 = (V^2 - u^2) [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (\zeta - \zeta)^2] + u^2 (x - \xi)^2 + [(V^2 - u^2) \theta^2 - 2\theta u(x - \xi)] [w_x (x - \xi) + \dots] + [2(V^2 - u^2) \theta^2 - 3\theta u(x - \xi)] \theta u w_x$$

Au coefficient V^2 près, la première ligne

et on peut écrire

$$\frac{(V^2 - u_0^2) (x - x_0 - \theta u_{0x})}{(BM)^3} = \frac{(V^2 - u^2) (x - x_0 - \theta u_{0x})}{(BM)^3} + \frac{2\theta u w_x (x - x_0 - \theta u_{0x})}{(BM)^3}$$

ou encore, en remplaçant dans le premier terme x_0 et u_{0x} par leurs valeurs, l'expression précédente devient

$$\frac{(V^2 - u^2) (x - \xi)}{(BM)^3} + \frac{\frac{1}{2} \theta^2 w_x (V^2 - u^2) + 2\theta u w_x [x - x_0 - \theta u_{0x}]}{(BM)^3}$$

Dans le dernier terme le numérateur est du deuxième ordre, au lieu du premier pour le premier terme. Ce deuxième terme pourra donc être calculé en ne prenant que les valeurs principales. Reste donc seulement à calculer $\frac{1}{(BM)^3}$ au second degré d'approximation. Par définition

et le premier terme de la seconde représente la valeur de $(BM)^3$ au premier degré d'approximation. Par suite, si on appelle ρ la distance PM et χ l'angle de PM avec O, cette quantité est égale à $\rho^2 [V^2 - u^2 \sin^2 \chi]$.

Dans les deux dernières lignes je remplace encore $(V^2 - u^2) \theta^2$ par sa valeur (25), mais en remarquant que je puis ici me borner au premier degré d'approximation, puisque $(V^2 - u^2) \theta^2$ se trouve multiplié par des infiniment petits. Finalement

$$V^2(BM)^3 = \rho^3 [V^2 - u^2 \sin^2 \chi] + \rho^3 [w_x (x - \xi) + w_y (y - \eta) + w_z (\zeta - \zeta)] + \theta u w_x [2\rho^2 + \theta u (x - \xi)]$$

Soit ψ l'angle du plan PM, O_x avec le plan des xy .

On trouve facilement

$$(x - \xi) = \rho \cos \chi \quad (y - \eta) = \rho \sin \chi \cos \psi \\ (\zeta - \zeta) = \rho \sin \chi \sin \psi$$

et au premier degré d'approximation

$$P_0 M = V \frac{\sqrt{V^2 - u^2 \sin^2 \chi} + u \cos \chi}{V^2 - u^2} \rho \\ \theta = \frac{\sqrt{V^2 - u^2 \sin^2 \chi} + u \cos \chi}{V^2 - u^2} \rho$$

Par suite

$$V^2 (BM)^2 = \rho^2 [V^2 - u^2 \sin^2 \chi] + \rho^2 \left\{ [w_x \cos \chi + w_y \sin \chi \cdot \cos \psi + \dots] - w_x \frac{u^4 \cos^3 \chi}{(V^2 - u^2)^2} + uw_x \left[V^2 - u^2 \sin^2 \chi \right] \frac{3u \cos \chi + 2\sqrt{\dots}}{(V^2 - u^2)^2} \right\}$$

et enfin

$$\frac{1}{V^2 (BM)^2} = \frac{1}{\rho^2 [V^2 - u^2 \sin^2 \chi]^{\frac{3}{2}}} \left[1 - \frac{3}{2} \rho \frac{[w_x \cos \chi + \dots] - uw_x \frac{u^3 \cos^3 \chi - [V^2 - u^2 \sin^2 \chi] (3u \cos \chi + 2\sqrt{\dots})}{(V^2 - u^2)^2}}{V^2 - u^2 \sin^2 \chi} \right]$$

Réunissant les différents termes calculés, on aura donc au degré d'approximation admis

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dede'} &= V^3 \frac{(V^2 - u^2) \cos \chi}{\rho^2 [V^2 - u^2 \sin^2 \chi]^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2} V^3 \frac{[w_x \cos \chi + \dots] (V^2 - u^2) - \frac{u^4 w_x \cos^3 \chi}{(V^2 - u^2)}}{\rho [V^2 - u^2 \sin^2 \chi]^{\frac{5}{2}}} \cos \chi \\ &\quad - \frac{3}{2} V^3 \frac{uw_x (3u \cos \chi + 2\sqrt{\dots}) \cos \chi}{\rho [V^2 - u^2 \sin^2 \chi]^{\frac{3}{2}} (V^2 - u^2)} \\ &+ \frac{V^3}{\rho [V^2 - u^2 \sin^2 \chi]^{\frac{3}{2}}} \left\{ \frac{1}{2} w_x \frac{V^2 + u^2 (\cos^2 \chi - \sin^2 \chi) + 2u \sqrt{\dots} \cos \chi}{V^2 - u^2} + 3uw_x \frac{\sqrt{\dots} + u \cos \chi}{V^2 - u^2} \cos \chi \right. \\ &\quad \left. + [w_x \cos \chi + \dots] \cos \chi - w_x \frac{V^2 - u^2 \sin^2 \chi + u \sqrt{\dots} \cos \chi}{V^2 - u^2} \right\} \end{aligned}$$

On peut dans l'expression précédente supprimer tous les termes qui changent de signe lorsque l'on intervertit le rôle des points P et M, ce qui revient à changer χ en $\pi - \chi$ et ψ en $\pi + \psi$, ou encore à changer les signes de $\cos \chi$, $\sin \chi \cos \psi$ et $\sin \chi \sin \psi$. Le terme en $\frac{1}{\rho^2}$ disparaît comme nous l'avions annoncé, et parmi les autres ne restent que ceux qui ne contiennent pas le radical au numérateur : ces derniers ont d'ailleurs une somme identiquement nulle. Par suite

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dede'} &= - \frac{V^3 [w_x \cos \chi + \dots] \cos \chi}{2\rho [V^2 - u^2 \sin^2 \chi]^{\frac{5}{2}}} \\ &\quad [V^2 - u^2 \sin^2 \chi - 3u^2 \cos^2 \chi] \\ &- \frac{V^3 w_x}{2\rho [V^2 - u^2 \sin^2 \chi]^{\frac{5}{2}}} \left\{ V^2 - u^2 \sin^2 \chi + 3u^2 \cos^2 \chi \right\} \end{aligned}$$

Or χ est l'angle des deux directions ρ et u et l'expression $w_x \cos \chi + \dots$ est égale à $\chi \cos$

(w , ρ), de sorte que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dede'} &= - \frac{V^3 w [\cos(w, \rho) \cos(u, \rho) + \cos(w, u)]}{2\rho [V^2 - u^2 \sin^2(u, \rho)]^{\frac{3}{2}}} \\ &+ \frac{3V^3 w u^2 \cos^2(u, \rho) [\cos(w, \rho) \cos(u, \rho) - \cos(w, u)]}{2\rho [V^2 - u^2 \sin^2(u, \rho)]^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant supposer les axes quelconques. Nous devons seulement remplacer dX par dF_u , puisque la composante de la force calculée est celle parallèle à u . Multipliant par $u dt$ et remarquant que la direction ρ restant fixe puisque le mouvement est de translation, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u \cos(u, \rho) &= w \cos(w, \rho) \\ \frac{d}{dt} u^2 &= 2uw \cos(w, u) \end{aligned}$$

il vient

$$\frac{dF_u u dt}{dede'} = - d \frac{V^2 - u^2 \sin^2(u, \rho) + u^2 \cos^2(u, \rho)}{2\rho [V^2 - u^2 \sin^2(u, \rho)]^{\frac{3}{2}}} V^3$$

Revenons aux axes particuliers et opérons pour g commé pour f . Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{4\pi V^2 g d e'}{d e d e'} &= -\frac{3}{2} V^3 \frac{[w_x \cos \chi + \dots] (V^2 - u^2) - \frac{u^4 w_x \cos^3 \chi}{(V^2 - u^2)}}{\rho \left[V^2 - u^2 \sin^2 \chi \right]^{\frac{5}{2}}} \sin \chi \cos \psi \\ &\quad - \frac{3}{2} V^3 \frac{u w_x 3 u \cos \chi}{\rho \left[\dots \right]^{\frac{3}{2}} (V^2 - u^2)} \sin \chi \cos \psi \\ + \frac{V^3}{\rho \left[\dots \right]^{\frac{3}{2}}} &\left\{ \frac{1}{2} w_y \frac{V^2 + u^2 (\cos^2 \chi - \sin^2 \chi)}{V^2 - u^2} + 3 u w_x \frac{u \cos \chi}{V^2 - u^2} \sin \chi \cos \psi \right. \\ &\quad \left. + [w_x \cos \chi + \dots] \sin \chi \cos \psi - w_y \frac{V^2 - u^2 \sin^2 \chi}{V^2 - u^2} \right\}. \end{aligned}$$

Pour γ le calcul serait analogue

$$\begin{aligned} \frac{\gamma d e'}{d e d e'} &= \frac{[V^2 - u^2 + \Sigma w_{0x} (x - x_0)] [u_{0x} (\gamma - \gamma_0) - u_{0y} (x - x_0)] + V (BM) [w_x (\gamma - \gamma_0) - w_y (x - x_0)]}{V^2 (BM)^3} \\ &= \frac{(V^2 - u^2) [u (\gamma - \gamma_0) - \theta w_x (\gamma - \gamma_0) + \theta w_y (x - x_0)]}{V^2 (BM)^3} + \text{etc...} \\ &= \frac{(V^2 - u^2) u (\gamma - \eta)}{V^2 (BM)^3} + \frac{-(V^2 - u^2) u \frac{1}{2} \theta^2 w_y}{V^2 (BM)^3} - \frac{\theta (V^2 - u^2) [w_x (\gamma - \gamma_0) - w_y (x - x_0)]}{V^2 (BM)^3}. \end{aligned}$$

Le premier terme est le seul où le numérateur est du premier ordre et où il faille remplacer (BM) par sa valeur exacte. Dans les deux autres et dans tous ceux non écrits le numérateur est du deuxième ordre; il suffit de prendre la valeur principale de chaque facteur. Par suite, en réunissant les termes en $w_x (\gamma - \gamma_0) - w_y (x - x_0)$ on aura (en supprimant tout de suite les termes qui disparaissent)

$$\begin{aligned} \frac{\gamma d e'}{d e d e'} &= -\frac{3}{2} V u \frac{[w_x \cos \chi + \dots] (V^2 - u^2) - \frac{u^4 w_x \cos^3 \chi}{V^2 - u^2}}{\rho \left[\dots \right]^{\frac{5}{2}}} \sin \chi \cos \psi \\ &\quad - \frac{3}{2} V u \frac{u w_x (3 u \cos \chi)}{\rho \left[\dots \right]^{\frac{3}{2}} (V^2 - u^2)} \sin \chi \cos \psi \\ + \frac{V}{\rho \left[\dots \right]^{\frac{3}{2}}} &\left\{ -\frac{1}{2} u w_y \frac{V^2 + u^2 (\cos^2 \chi - \sin^2 \chi)}{V^2 - u^2} - u \cos \chi \left[w_x \sin \chi \cos \psi - w_y \left(\cos \chi + \frac{u^2 \cos \chi}{V^2 - u^2} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + 3 u^2 w_x \sin \chi \cos \psi \frac{u \cos \chi}{V^2 - u^2} + [w_x \cos \chi + \dots] u \sin \chi \cos \psi \right\}. \end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned} \frac{dY}{d e d e'} &= \frac{(4\pi V^2 g - u\gamma) d e'}{d e d e'} = -\frac{V (V^2 - u^2) [w_x \cos \chi + \dots] [V^2 - u^2 \sin^2 \chi - 3 u^2 \cos^2 \chi]}{2\rho \left[\dots \right]^{\frac{5}{2}}} \sin \chi \cos \psi \\ &\quad - \frac{V u^2 w_x \cos \chi \sin \chi \cos \psi}{2\rho \left[\dots \right]^{\frac{5}{2}}} [V^2 - u^2 \sin^2 \chi - 3 u^2 \cos^2 \chi] - \frac{V w_y}{2\rho \left[\dots \right]^{\frac{3}{2}}} [V^2 - u^2 \sin^2 \chi + u^2 \cos^2 \chi]. \end{aligned}$$

En remarquant que $\cos(u, \gamma)$ est identiquement nul, on peut encore écrire

$$\frac{dY}{dede'} = \frac{-Vw \{ (V^2 - u^2) \cos(w, \rho) + u^2 \cos(w, u) \cos(u, \rho) \} [V^2 - u^2 \sin^2(u, \rho) - 3u^2 \cos^2(u, \rho)] \cos(\rho, \gamma)}{2\rho [V^2 - u^2 \sin^2(\rho, u)]^{\frac{5}{2}}}$$

$$- \frac{Vw [V^2 - u^2 \sin^2(u, \rho) + u^2 \cos^2(u, \rho)] \cos(w, \gamma)}{2\rho [\dots]^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{Vu^2 w \cos(w, \rho) \cos(u, \rho) [V^2 - u^2 \sin^2(u, \rho) - 3u^2 \cos^2(u, \rho)] \cos(u, \gamma)}{2\rho [\dots]^{\frac{5}{2}}}$$

$$- \frac{Vu^2 w \cos(w, u) [V^2 - u^2 \sin^2(u, \rho) + 3u^2 \cos^2(u, \rho)] \cos(u, \gamma)}{2\rho [\dots]^{\frac{5}{2}}}$$

Si on change dans cette expression γ en x , on constate, après quelques réductions, que l'on retombe sur la valeur de $\frac{dX}{de de'}$. D'ailleurs sous leur nouvelle forme les expressions se conservent sans changement par rotation des

axes de coordonnées. La nouvelle forme est donc valable sans que l'on ait besoin de supposer l'axe des x parallèle à u . Nous pourrions alors supposer les axes fixes dans l'espace.

L'angle (ρ, γ) étant fixe, l'expression précédente peut s'écrire

$$\frac{dY}{dede'} = -Vu \frac{d}{dt} \frac{(V^2 - u^2) \cos(u, \rho) \cos(\rho, \gamma) + [V^2 - u^2 \sin^2(u, \rho) + u^2 \cos^2(u, \rho)] \cos(u, \gamma)}{2\rho [\dots]^{\frac{3}{2}}}$$

Ou encore, géométriquement, l'impulsion élémentaire est égale à

$$-Vdede'd \frac{(V^2 - u^2) \bar{u}_\rho + [V^2 - u^2 \cos^2(u, \rho)] \bar{u}}{2\rho [V^2 - u^2 \sin^2(u, \rho)]^{\frac{3}{2}}}$$

en représentant par \bar{u}_ρ la composante de \bar{u} suivant ρ .

Supposons en particulier que le corps soit sphérique, et bornons-nous à la première approximation en supposant u^2 négligeable devant V^2 . La valeur de l'impulsion des forces qui agissent sur le corps sera

$$- \int \int (\bar{u} + \bar{u}_\rho) \frac{dede'}{2\rho} = -\bar{u} \int \int \frac{dede'}{2\rho} - \int \int \frac{\bar{u}_\rho dede'}{2\rho}$$

Or $\int \int \frac{dede'}{2\rho}$ représente en électrostatique l'énergie potentielle de la sphère sur elle-même, soit $\frac{3}{5} \frac{e^2}{a}$, si a est le rayon de la sphère et si la charge est répartie uniformément dans tout le volume de la sphère. Quant à la seconde intégrale, par raison de symétrie

elle représentera un vecteur ayant même direction que \bar{u} , et par suite pour l'évaluer on peut remplacer $u\rho$ par sa projection sur u , soit $u \cos^2(\rho, u)$. Cette seconde intégrale est donc égale au facteur \bar{u} près à

$$\int \int \frac{\cos^2(\rho, u) dede'}{2\rho} = \int \int \frac{\cos^2(\rho, u') dede'}{2\rho}$$

$$= \int \int \frac{\cos^2(\rho, u'') dede'}{2\rho}$$

$$= \frac{1}{3} \int \int \frac{\cos^2(\rho, u) + \cos^2(\rho, u') + \cos^2(\rho, u'') dede'}{2\rho}$$

$$= \frac{1}{3} \int \int \frac{dede'}{2\rho} = \frac{1}{5} \frac{e^2}{a}$$

par raison de symétrie, en appelant u' et u'' deux directions formant avec u un trièdre trirectangle. Finalement l'impulsion est égale $-\frac{4}{5} \frac{e^2}{a} \bar{u}$, et sa dérivée $-\frac{4}{5} \frac{e^2}{a} \bar{w}$, résultante des forces développées par la sphère sur elle-même, constitue ce qu'on peut appeler l'inertie électrique de la sphère.

L'expression obtenue pour le travail des forces électriques conduit au même résultat.

En effet ce travail est égal, au même degré d'approximation, à

$$\iint \frac{\left[V^2 - \frac{1}{2} u^2 \sin^2(u, \rho) - u^2 \cos^2(u, \rho) \right] dede'}{2\rho}.$$

On peut laisser de côté le terme constant $V^2 \iint \frac{de de'}{2\rho}$ et il reste simplement

$$-\frac{u^2}{2} \iint \frac{1 + \cos^2(u, \rho)}{2\rho} dede' = -\frac{2}{5} \frac{e^2}{a} u^2$$

dont la différentielle $-\frac{4}{5} \frac{e^2}{a} u w \cos(u, w) dt$ représente bien le travail de la force d'inertie électrique.

Si on supposait la charge uniquement à la surface, l'intégrale $\iint \frac{de de'}{2\rho}$ serait égale à $\frac{e^2}{2a}$, et par suite l'inertie électrique aurait la valeur $-\frac{2}{3} \frac{e^2}{a} \bar{w}$, expression déjà donnée par M. Larmor.

IV. — *Examinons en particulier le cas où la vitesse u deviendrait égale ou supérieure à la vitesse V de la radiation.*

Jusqu'à présent nous avons toujours supposé u plus petit que V . En effet, pour que les expressions trouvées ne soient pas infinies il faut que la quantité BM ou $\frac{P_0 M}{V} (V - u \cos \varphi)$ qui figure en dénominateur ne puisse pas s'annuler, et pour cela que u soit plus petit que V . Il convient d'examiner ce qui arrivera dans le cas contraire et en particulier de voir si réellement, comme l'annoncent MM. Larmor (1) et Searle (2), il est impossible d'imprimer à un corps électrisé une vitesse égale ou supérieure à V .

Lorsque u est plus grand que V , notre point A est extérieur à la sphère, que nous avons appelée onde, de centre P_0 et de rayon $P_0 M$ (fig. 5). Si on considère le cône de sommet A circonscrit à la sphère, le cercle de

contact CC' divise la sphère en deux régions.

Dans l'une, la plus éloignée de A , $V - u \cos \varphi$ est positif et les calculs précédents sont valables sans modification.

Dans l'autre, la plus rapprochée de A , $V - u \cos \varphi$ est négatif mais fini. Dans ces conditions, je dis qu'il faut changer tous les signes des expressions trouvées pour D et H ou leurs composantes.

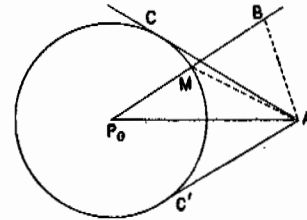


Fig. 5.

En effet, reportons-nous à la détermination de la fonction ψ définie par l'intégrale (12); $d\omega'$ est essentiellement positif, ainsi que $d\omega$ qui représente le volume balayé par la surface AB par rapport à Ω , tandis que $d\omega'$ représente le volume réellement balayé. Nous avons vu que

$$d\omega' = \frac{d\omega}{1 - \frac{u}{V} \cos(u, r)}$$

Puisque $d\omega'$ et $d\omega$ sont forcément positifs il faudra changer la relation en la suivante

$$d\omega' = - \frac{d\omega}{1 - \frac{u}{V} \cos(u, r)}$$

lorsque le dénominateur sera négatif. D'où un changement de signe pour ψ et pour toutes les expressions qui figurent dans la suite des calculs. C'est d'ailleurs la seule modification à apporter, comme on s'en convainc facilement en reprenant les calculs.

Enfin sur CC' , BM est nul et tout est infini.

Remarquons que tant que l'on supposait u inférieur à V , à chaque position du point M correspondaient une valeur et une seule pour θ et une position unique pour le point P_0 . En effet, lorsque θ croît de 0 à l'infini, la

(1) LARMOR. On a dynamical theory of the electric and luminiferous medium. *Phil. Trans.*, 1894, A. p. 809.

(2) SEARLE. On the steady motion of an Electrified Ellipsoid. *Phil. Mag.*, t. XLIV, 1897, p. 341.

sphère de centre M et de rayon $V\theta$ se dilate avec une vitesse V supérieure à celle de la charge, et par suite l'atteint forcément et ne peut plus être de nouveau rencontrée par elle.

Au contraire, si u prend des valeurs supérieures à V , le nombre des racines réelles et positives en θ de l'équation (14) peut être nul ou au contraire plus grand que 1. Dans ce cas il faudra considérer les diverses positions correspondantes pour le point P_0 et ajouter (géométriquement) les valeurs de D et de H correspondant à chacune d'elles.

Considérons l'état du champ à un instant t déterminé où la charge est en P. A chaque valeur de θ correspondent une sphère et un cercle CC' . Le lieu de ces cercles lorsque θ variera sera l'enveloppe E des sphères d'onde S. Cette enveloppe divisera l'espace en deux (ou un plus grand nombre) régions. Pour les points de l'une, les valeurs de θ seront imaginaires, c'est-à-dire que la perturbation ne sera point encore parvenue jusqu'à eux et que le champ y sera nul. Pour les points de l'autre, θ aura plusieurs valeurs réelles et le champ pourra y être déterminé comme il vient d'être dit. Enfin sur l'enveloppe elle-même, l'équation en θ aura une racine double pour laquelle BM sera nul et le champ aura une intensité infinie. Cherchons l'ordre de grandeur de D et H pour des points infiniment voisins de l'enveloppe.

Développons l'équation (14) par la série de Taylor :

$$2 \sum (x - x_0) (\delta x - \delta x_0) + \sum (\delta x - \delta x_0)^2 = 2 V^2 \theta \delta \theta + V^2 \delta \theta^2.$$

D'ailleurs

$$\delta x_0 = -u_x \delta \theta + \frac{1}{2} w_x \delta \theta^2 + \dots$$

d'où en remplaçant, il vient

$$2 \sum (x - x_0) \left(\delta x + u_x \delta \theta - \frac{1}{2} w_x \delta \theta^2 \right) + \sum \left(\delta x + u_x \delta \theta - \frac{1}{2} w_x \delta \theta^2 \right)^2 = 2 V^2 \theta \delta \theta + V^2 \delta \theta^2$$

ou encore puisque $BM = \frac{1}{V} [V^2 \theta - \sum u_x$

$(x - x_0)]$ est nul

$$2 \sum (x - x_0) \left(\delta x - \frac{1}{2} w_x \delta \theta^2 \right) + \sum \left[\delta x + \dots \right]^2 = V^2 \delta \theta^2.$$

Ce qui montre que $\delta \theta^2$ est de l'ordre de δx , δy , δz , ou encore que $\delta \theta$ est infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$ pour un point situé à une distance de l'enveloppe infiniment petite du premier ordre. On voit d'ailleurs facilement que BM , nul sur l'enveloppe, est au voisinage du même ordre que $\delta \theta$. Donc D et H dont les expressions contiennent $(BM)^2$ en dénominateur seront infiniment grands d'ordre $\frac{3}{2}$. Par suite les intégrales

$$2 \pi V^2 \int (f^2 + g^2 + h^2) d\omega. \quad \frac{1}{8\pi} \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\omega$$

qui représentent l'énergie électrique et l'énergie magnétique seront infinies et il faudra dépenser un travail infini pour imprimer à la charge une vitesse égale ou supérieure à V .

Mais il faut remarquer que l'énergie est déjà infinie pour une autre cause, même lorsque la vitesse est inférieure à V : en effet, au voisinage de la charge, que nous avons supposée réduite à un point, D et H sont infiniment grands du deuxième ordre. Il nous faut donc examiner le cas d'une charge répartie dans un certain volume et voir si l'énergie sera encore infinie pour une vitesse supérieure à V , pour décider si oui ou non il est possible d'imprimer à un corps chargé une vitesse égale ou supérieure à V .

On peut opérer de deux manières : soit traiter directement le problème au moyen des équations (5) et (6), soit décomposer le volume Ω du corps en éléments infiniment petits $d\omega$, calculer les intensités des champs produits par les charges de chacun de ces éléments $d\omega$ supposés réduits à un point et en faire la somme. C'est ce que nous examinerons dans un prochain article.

(A suivre.)

A. LIÉNARD.

Professeur à l'Ecole des Mines de Saint-Etienne

CHAMP ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE

PRODUIT PAR UNE CHARGE ÉLECTRIQUE CONCENTRÉE EN UN POINT ET ANIMÉE
D'UN MOUVEMENT QUELCONQUE (1)

Examinons le cas d'une charge répartie dans un certain volume et voyons si l'énergie sera encore infinie pour une valeur supérieure à V .

Commençons par le second des procédés indiqués.

1° Soit P (ξ, η, ζ) un point quelconque du corps autour duquel nous considérons un élément $d\omega$ et soit toujours M le point où nous voulons évaluer le champ. A chaque position du point P à l'intérieur de Ω , correspondra une enveloppe E d'équation

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0. \quad (26)$$

Il y a lieu d'introduire les coordonnées ξ, η, ζ du point P dans l'équation de l'enveloppe, puisqu'à chaque position de P correspondra une enveloppe particulière. Si on considère toutes les positions possibles de P à l'intérieur du corps électrisé Ω , l'ensemble des enveloppes correspondantes occupera une région C de l'espace. Si le point M est en dehors de C , les valeurs de D et H en ce point seront représentées par des intégrales telles que $\int \bar{A} \rho d\omega$ où ρ est la densité électrique et où la fonction \bar{A} , représentant au signe près le facteur de e aux seconds membres des équations (17') ou (18'), ne sera jamais infinie. L'intégrale sera donc elle-même finie.

Soit au contraire le point M (x, y, z) dans la région C . Il existera à l'intérieur de Ω des positions du point P pour lesquelles (BM) sera nul et ces points seront évidemment sur la surface (26) en y considérant maintenant x, y, z comme données et ξ, η, ζ comme coordonnées courantes. Soit Σ cette surface. Un raisonnement analogue à celui fait plus haut montre que pour les positions de P voisines

de Σ , (BM) est infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2}$ et par suite \bar{A} infiniment grand d'ordre $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire supérieur à 1. L'intégrale $\int \bar{A} \rho d\omega$ est alors infinie et il semble que le champ a une intensité infinie dans toute la région C .

Au lieu de chercher les valeurs de D et H , cherchons celles de ψ et de F, G, H . Ici les fonctions à intégrer seront $\frac{1}{(BM)}, \frac{ux}{(BM)}$, etc., qui ne seront infiniment grandes que d'ordre $\frac{1}{2}$. Par suite les intégrales seront finies et les fonctions ψ, F, G, H seront finies et bien déterminées dans tout l'espace (2). Mais alors $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$ déterminés par les équations (9) et (10) seront eux-mêmes finis et déterminés.

La contradiction apparente entre les deux résultats est analogue à la particularité présentée par la détermination de la force à l'intérieur d'un aimant.

Soit un aimant de moment M (M_x, M_y, M_z); en un point à la distance r le potentiel magnétique a pour valeur

$$V = \frac{x M_x + y M_y + z M_z}{r^3}$$

et les composantes de la force magnétique sont

$$\alpha = M_x \frac{3x^2 - r^2}{r^5} + \dots = - \frac{dV}{dx}$$

$$\beta = \dots \quad \gamma = \dots$$

en supposant l'aimant de dimensions nulles et situé à l'origine des coordonnées.

(1) Voir *L'Éclairage Électrique* des 2 et 9 juillet, p. 5 et 53.

(2) Sauf cependant s'il y avait un point de Σ correspondant à une valeur de θ infini, car alors BM serait du 1^{er} ordre. Voir infra.

Soit maintenant un aimant de dimensions finies. Pour calculer le potentiel magnétique et la force magnétique en un point, on fera l'intégrale des valeurs élémentaires dues à chaque partie de l'aimant. On sait que pour un point intérieur à l'aimant le potentiel a toujours une valeur bien déterminée, bien que la fonction à intégrer devienne infinie dans le champ d'intégration et admet des dérivées. Mais la force magnétique est indéterminée et n'est par suite plus égale à la dérivée du potentiel.

Ici il en est de même. Les valeurs de f , g , h , α , β , γ , calculées par intégration, sont infinies ou indéterminées, tandis que les fonctions ψ , F , G , H restent finies et admettent des dérivées. Mais ici les équations (9) et (10), d'après la manière dont elles ont été obtenues, sont certainement applicables dans tous les cas même à l'intérieur des corps électrisés, tandis que les formules (18) et (19) étant les résultats de transformations de calcul faites en supposant toujours $(B M)$ différent de zéro, il n'est pas étonnant que ces formules conduisent à des résultats incorrects lorsque $(B M)$ devient nul dans le champ d'intégration.

Finalement nous voyons que \bar{D} et \bar{H} restent finis et que par suite rien ne s'oppose à ce que l'on puisse imprimer à un corps électrisé une vitesse supérieure à V .

Avant de passer à la seconde méthode, remarquons encore que $B M$ peut aussi être infiniment petit dans le champ d'intégration dans un autre cas, lorsque le point M est à l'intérieur du corps Ω et que l'on prend un point P infiniment voisin de M . Mais alors $(A M)$ et (P, M) sont aussi infiniment petits, de sorte que la fonction A considérée précédemment est du deuxième ordre de grandeur, et comme elle ne l'est qu'aux environs d'un point et non d'une surface, l'intégrale n'en restera pas moins finie.

2° L'autre procédé permet d'approfondir la question un peu plus complètement.

Considérons l'équation (7). A la traversée

de la surface du corps électrisé ρ passe brusquement de la valeur 0 à une valeur finie. Par conséquent ρ est une fonction discontinue de x, y, z, t . Or ψ figure dans (7) par les dérivées $\frac{d^2\psi}{dx^2}, \frac{d^2\psi}{dy^2}, \frac{d^2\psi}{dz^2}, \frac{d^2\psi}{dt^2}$. Ces dérivées du deuxième ordre peuvent donc être discontinues, mais celles du premier ordre $\frac{d\psi}{dx}, \frac{d\psi}{dy}, \frac{d\psi}{dz}, \frac{d\psi}{dt}$ doivent être déterminées et continues, sinon celles du deuxième ordre pourraient être infinies. De même pour F, G, H . Donc $f, g, h, \alpha, \beta, \gamma$, dont les expressions ne contiennent que les dérivées du premier ordre de ψ, F, G, H sont des fonctions finies et continues de x, y, z, t .

Il convient de ne pas se contenter de cette démonstration a priori et d'étudier la continuité de ψ d'après l'équation résolue, c'est-à-dire d'après (12). Les résultats obtenus s'étendront immédiatement aux fonctions F, G, H . Nous verrons ainsi que le résultat précédent n'est pas toujours exact, ce qui tient à ce que, même pour des valeurs infinies de $\frac{d^2\psi}{dx^2}$, etc., l'expression $(V^2 \Delta - \frac{d^2}{dt^2}) \psi$ peut rester finie.

Nous avons vu que le champ d'intégration dans l'expression (12) était déterminé de la manière suivante: M (fig. 6) étant le point où l'on

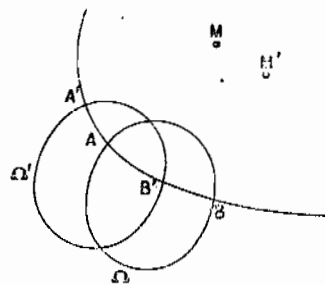


Fig. 6.

veut évaluer la valeur de ψ à l'instant t , on décrit de M comme centre une sphère S de rayon $V\theta$ et on cherche la partie AB de cette sphère située à l'intérieur du corps électrisé pris dans sa position à l'instant $t - \theta$. La région balayée par AB lorsque θ varie de 0 à ∞ constitue le champ d'intégration.

Si ce champ d'intégration est fini ψ sera

fini. En effet le deuxième membre de l'équation (12) représente le potentiel électrostatique ordinaire d'une certaine distribution électrique, de densité finie, répandue dans le champ d'intégration, et le potentiel est toujours fini et déterminé même si le point M est à l'intérieur du champ.

Au contraire, si le champ d'intégration s'étend à l'infini, comme ρ restera fini, le potentiel sera infini.

Nous n'avons donc à voir seulement dans quels cas le champ d'intégration s'étendra jusqu'à l'infini.

Si pour $t = -\infty$, les vitesses de chaque point de la charge électrisée diffèrent de V (dans un sens ou dans l'autre), en tendant vers des directions déterminées, pour θ croissant indéfiniment, tous les points de Ω finiront par se trouver soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de la sphère de rayon $V\theta$ et le champ d'intégration ne s'étendra pas jusqu'à l'infini. ψ sera fini et bien déterminé pour tous les points de l'espace.

Supposons au contraire que les vitesses pour $t = -\infty$ soient égales à V et avec une direction déterminée. Alors la vitesse de dilatation de la sphère sera à la limite égale à celle de Ω et pour des positions convenables du point M , l'intersection AB restera réelle pour θ infini, et ψ sera infini. En particulier si on suppose le corps animé d'un mouvement permanent et uniforme de vitesse V , ψ sera infini pour tous les points de l'espace compris entre les plans extrêmes tangents à la position de Ω à l'instant t , plans menés normalement à V .

MM. Larmor et Searle se sont bornés à l'étude des mouvements permanents. Dans ce cas ils devaient arriver à cette conclusion que le champ devenant infini pour une vitesse du corps égale à V , il était impossible d'imprimer cette vitesse. Mais le résultat tient uniquement à la considération des mouvements permanents les obligeant à supposer le corps animé de la vitesse V depuis un temps infini.

Pour se conformer à la réalité, il faut au

contraire supposer que le mouvement a eu un commencement et il résulte de ce qui précède que dans ces conditions ψ sera fini et bien déterminé pour tous les points de l'espace.

Reste à voir si ψ est continu dans le temps comme dans l'espace et admet des dérivées bien déterminées.

Soit M' , un autre point de l'espace. Pour avoir la valeur correspondante ψ' nous opérerons comme précédemment. Pour chaque valeur de θ , les deux sphères S et S' ayant M et M' comme centres auront même rayon. Déplaçons S' d'une quantité égale et parallèle à $M'M$, de manière à la faire coïncider avec S , et imprimons le même déplacement à Ω , ce qui l'amènera en Ω' . Ω' jouera le même rôle par rapport à M que Ω par rapport à M' , et en opérant sur Ω' comme nous l'avons fait pour Ω nous obtiendrons la valeur de ψ' .

Cette valeur différera de ψ pour deux causes : d'une part, le champ d'intégration différera, puisque ce sera l'espace balayé non plus par AB , mais par $A'B'$, $A'B'$ étant la portion de S intérieure à Ω' ; d'autre part, la densité aura varié en chaque point.

Si MM' est infiniment petit et égal à ds , la variation de densité en un point sera égale à $\frac{d\rho}{ds} ds$ et la variation correspondante de ψ sera

$$ds \int \frac{\frac{d\rho}{ds}}{r} d\omega.$$

Cette variation est infiniment petite du même ordre que ds et son quotient par ds est fini et déterminé (1).

Pour que ψ soit continu et admette une dérivée il suffira donc que la différence des deux champs d'intégration soit aussi infini-

(1) Le raisonnement suppose $\frac{d\rho}{ds}$ fini et par suite ρ continue dans tout l'intérieur de Ω . S'il y avait des surfaces de discontinuité, ces surfaces diviseraient Ω en plusieurs régions pour chacune desquelles on ferait une étude comme celle faite pour Ω .

ment petite du même ordre que ds et que son quotient par ds soit fini et déterminé.

Considérons d'abord une valeur de θ pour laquelle S ne soit pas tangent aux surfaces Σ et Σ' de ω et ω' , c'est-à-dire coupe ces surfaces suivant des angles finis. Alors la zone de S entre AB et $A'B'$ sera infiniment petite et proportionnelle à ds et si entre les valeurs θ_1 et θ_2 de θ la condition précédente est satisfaite, la différence correspondante des champs d'intégration sera elle-même proportionnelle à ds .

Soit maintenant une sphère S coupant Σ et Σ' sous des angles infiniment petits et par suite sensiblement tangente à ces deux surfaces. Menons deux sphères T , T' concentriques à S et tangentes aux surfaces Σ et Σ' aux points Q et $Q'a'$. Si h et h' sont les différences des rayons de T et T' avec S , h et h' représenteront les distances de Σ et Σ' à S .

Deux cas peuvent se présenter : 1° les sphères T et T' toucheront les surfaces Σ et Σ' sans les couper réellement ; 2° les intersections seront réelles et présenteront un point double en Q ou Q' .

Dans cette seconde hypothèse les intersections de S avec Σ et Σ' seront aussi réelles et l'aire sphérique de S comprise entre les deux sera de l'ordre de grandeur de $h - h'$, qui lui-même est de l'ordre de ds . Ici encore rien de particulier.

Dans la première hypothèse au contraire, les intersections de S avec Σ et Σ' aux environs des points Q et Q' pourront être réelles ou imaginaires.

1° Les deux intersections sont imaginaires.

La surface S ne jouera aucun rôle dans la détermination du champ d'intégration.

2° Les deux intersections sont réelles et diffèrent peu de petites ellipses sphériques. Si R_1 et R_2 sont les rayons de courbure de Σ en Q et R celui de S , l'aire de l'ellipse AB aura pour valeur

$$2\pi h R \sqrt{\frac{R_1 R_2}{(R_1 - R)(R_2 - R)}}$$

celle de $A'B'$ sera

$$2\pi h' R \sqrt{\frac{R_1 R_2}{(R_1 - R)(R_2 - R)}}$$

R_1 et R_2 étant relatifs à Σ' et au point Q' et la différence sera de l'ordre de grandeur de $h - h'$. Le volume balayé par la différence des aires AB et $A'B'$ sera donc encore infiniment petit et proportionnel à ds , ce qui n'introduira aucune discontinuité dans ψ ni indétermination dans sa dérivée.

3° Une des deux intersections (celle avec S par exemple) est réelle et l'autre imaginaire (fig. 7). h et h' sont alors de signe contraire. L'aire $A'B'$ n'existe pas et l'aire AB a la valeur précédente proportionnelle à h . Or h et h' étant de signe contraire, h sera plus petit en valeur absolue que $h - h'$ qui est proportionnel à ds . L'aire AB est donc infiniment petite en même temps que ds , mais il n'y a plus proportionnalité, et il en sera de même pour le volume engendré par AB .

Si les vitesses normales des points Q et Q' sont différentes de V , les valeurs de θ entre lesquelles S pourra couper Σ sans couper Σ' (ou inversement) seront infiniment voisines et le volume correspondant balayé par AB sera infiniment petit du deuxième ordre et on pourra le négliger.

Mais si ces vitesses normales sont égales à V pendant un temps fini, de telle sorte que dans un intervalle fini dans la variation de θ la particularité étudiée subsiste, le volume engendré par AB ne sera pas négligeable, et puisqu'il est infiniment petit en même temps que ds sans lui être proportionnel, la dérivée de V sera indéterminée.

Soit M'' un point pris sur MM' de manière que la position correspondante de Σ soit tangente à S . Aux infiniment petits près d'ordre supérieur on aura évidemment la relation

$$\frac{MM''}{h} = \frac{M'M'}{-h'}$$

Pour deux points situés entre M et M'' les intersections correspondant à AB seront réelles et les différences des valeurs du po-

tentiel en ces points seront proportionnelles à leur distance. De même pour deux points situés de l'autre côté de M'' . Au contraire, si les

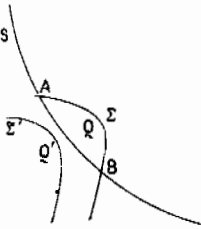


Fig. 7.

points considérés sont de part et d'autre de M'' , il n'y a plus proportionnalité. La dérivée de V sera donc discontinue au point M'' .

En résumé, on voit que la fonction V est toujours continue. Ses dérivées sont aussi déterminées en général, mais peuvent être discontinues, pour les points tels qu'une sphère de rayon $V\theta$ décrite de l'un de ces points comme centre soit, pendant un intervalle de temps fini, restée tangente, sans la couper, à la surface limite de la charge électrique, cette charge étant prise pour chaque valeur de θ dans sa position à l'instant $t - \theta$.

En particulier il y aura discontinuité de la dérivée à la traversée de la surface limite de la charge, si cette surface reste pendant un temps fini animée d'une vitesse normale égale à V .

Mais si la vitesse ne faisait que passer par cette valeur sans la conserver il n'en résulterait aucune discontinuité.

Pour étudier la continuité de la fonction ψ en un point par rapport au temps, au lieu de considérer deux sphères S et S' de même rayon et de centre différent, on considérerait au contraire deux sphères concentriques, mais dont les rayons différeraient de Vdt , s'il s'agit de comparer les valeurs du potentiel à deux instants différents de dt .

Les résultats sont les mêmes que précédemment et les points de discontinuité des dérivées par rapport à l'espace le sont aussi pour les dérivées par rapport au temps. Il suffit d'ailleurs d'un instant de réflexion pour se rendre compte qu'il doit en être ainsi.

Les résultats que nous venons d'obtenir pour la continuité de la fonction ψ et de ses dérivées sont applicables immédiatement, comme nous l'avons déjà fait remarquer, aux fonctions F, G, H .

Or les quantités $\alpha, \beta, V\gamma, f, g, h$ s'expriment linéairement au moyen des dérivées de ces quatre fonctions. Donc la force magnétique et le déplacement électrique sont toujours finis et généralement continus, sauf aux points ci-dessus définis. L'énergie du champ n'est donc pas infinie et il est possible d'imprimer à une charge une vitesse égale ou supérieure à V .

REMARQUE I. — Dans ce qui précède nous avons considéré les fonctions ψ, F, G, H comme suffisamment définies pour les équations (7) et (8) sans tenir compte de la condition (11). Nous en avons le droit parce que cette équation (11) ne fait qu'exprimer le principe de la conservation de l'électricité et est par suite forcément satisfaite. En effet on peut écrire

$$\left(V^2 \Delta - \frac{d^2}{dt^2} \right) \left[\frac{d\psi}{dt} + \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right] \\ = -4\pi V^2 \left[\frac{d\rho}{dt} + \frac{d(\rho ux)}{dx} + \frac{d(\rho uy)}{dy} + \frac{d(\rho uz)}{dz} \right]$$

et la parenthèse du deuxième membre est nulle d'après le principe de la conservation de l'électricité.

Dans la première question traitée nous aurions donc pu aussi nous dispenser de vérifier que la condition (11) était bien satisfaite.

REMARQUE II. — Dans l'analyse précédente nous avons omis un cas, celui où les surfaces Σ et Σ' auraient différé très peu, sur une portion notable de leur étendue, de sphères ayant pour centre le point M , la sphère S étant comprise entre les deux. Dans ce cas l'une des deux aires AB ou $A'B'$ aurait été nulle et l'autre finie, en sorte que si de telles conditions avaient été satisfaites pour une suite de valeurs de θ formant un intervalle de temps fini, la différence des potentiels aux

points M et M' aurait été finie et la dérivée infinie. Mais c'est là un cas très particulier, qui exigerait d'ailleurs que le volume de Ω soit déformable pour qu'une portion de sa surface puisse conserver sensiblement le point M comme centre de courbure pendant un intervalle de temps fini.

REMARQUE III. — Si au lieu d'une charge répartie dans un volume on étudie le cas d'une charge répartie sur une surface Σ , les résultats sont différents. Les fonctions ψ , F, G, H seront alors continues ou discontinues dans les cas où leurs dérivées l'étaient tout à l'heure. Par suite, leurs dérivées pourront devenir infinies et il en sera de même de la force magnétique et du déplacement. Dans ce cas il sera impossible d'imprimer à une surface électrisée une vitesse normale égale à V et la vitesse normale devra toujours rester soit inférieure, soit supérieure à V.

REMARQUE IV. — Si la force magnétique et le déplacement sont en général continus à la traversée d'une surface limite d'un corps électrisé, il n'en est pas de même de leurs dérivées qui sont toujours discontinues comme le montrent les équations (1) à (4).

Soit M un point de la surface Σ dont nous prendrons la normale vers l'intérieur pour axe des x , les axes des y et des z étant dans le plan tangent avec lequel la surface Σ pourra être confondue aux environs du point M.

Alors les dérivées par rapport à x pourront seules être discontinues et si je représente par $\Delta \frac{df}{dx}$ la discontinuité de la dérivée $\frac{df}{dx}$, les équations (3) donnent immédiatement

$$\Delta \frac{df}{dx} = \rho, \quad \Delta \frac{d\alpha}{dx} = 0. \quad (27)$$

$\Delta \rho$ est en effet égal à ρ et les Δ de $\frac{dg}{dy}$, $\frac{dh}{dz}$, $\frac{d\beta}{dy}$, $\frac{d\gamma}{dz}$ sont nuls.

Soit M' un point de Mx d'abscisse $u_x dt$. Un temps dt plus tard il se trouvera sur la surface Σ , puisque celle-ci se sera déplacée dans le sens Mx de la quantité MM'. La différence

des valeurs de f en M' et en M au temps t était

$$\left(\frac{df}{dx} + \Delta \frac{df}{dx} \right) u_x dt$$

$\frac{df}{dx}$ se rapportant au point M, mais à la face extérieure de Σ .

Pendant dt , f s'est accru de $\frac{df}{dt} dt$ en M et de $\left(\frac{df}{dt} + \Delta \frac{df}{dt} \right) dt$ en M', de sorte que la différence primitive est devenue

$$\left(u_x \frac{df}{dx} + u_x \Delta \frac{df}{dx} + \Delta \frac{df}{dt} \right) dt.$$

Mais d'autre part MM' se trouvant au bout du temps dt tout entier à l'extérieur de Σ , la différence des valeurs de f doit être devenue

$$\left(\frac{df}{dx} + \frac{d^2 f}{dx dt} dt \right) u_x dt.$$

Égalant ces deux valeurs en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, il vient

$$\Delta \frac{df}{dt} = -u_x \Delta \frac{df}{dx}. \quad (28)$$

On aurait cinq relations identiques pour g , h , α , β , γ .

En prenant les Δ de chaque terme des équations (1) et (2) et négligeant ceux qui sont nuls, on trouve facilement

$$\begin{aligned} 0 &= \rho u_x + \Delta \frac{df}{dt} \\ -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{d\gamma}{dx} &= \rho u_y + \Delta \frac{dg}{dt} \\ \frac{1}{4\pi} \Delta \frac{d\beta}{dx} &= \rho u_z + \Delta \frac{dh}{dt} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta \frac{d\alpha}{dt} \\ -V^2 \Delta \frac{dh}{dx} &= -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{d\beta}{dt} \\ +V^2 \Delta \frac{dg}{dx} &= -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{d\gamma}{dt} \end{aligned} \quad (30)$$

Si on tient compte des équations (27), (28) et des analogues à cette dernière, on voit que les premières équations (29) et (30) sont satis-

faites identiquement et les autres donnent

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{d\gamma}{dx} &= \rho u_y - u_x \Delta \frac{dg}{dx} \\
 \frac{1}{4\pi} \Delta \frac{d\beta}{dx} &= \rho u_z - u_x \Delta \frac{dh}{dx} \\
 -V^2 \Delta \frac{dh}{dx} &= \frac{u_x}{4\pi} \Delta \frac{d\beta}{dx} & V^2 \Delta \frac{dg}{dx} &= \frac{u_x}{4\pi} \Delta \frac{d\gamma}{dx}
 \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta \frac{dg}{dx} &= \frac{-\rho u_y u_x}{V^2 - u_x^2} = \frac{u_x}{4\pi V^2} \Delta \frac{d\gamma}{dx} \\
 \Delta \frac{dh}{dx} &= \frac{-\rho u_z u_x}{V^2 - u_x^2} = \frac{-u_x}{4\pi V^2} \Delta \frac{d\beta}{dx}
 \end{aligned} \right\} (31)$$

Pour u_x^2 égal à V^2 les Δ des $\frac{dg}{dx}$, $\frac{dh}{dx}$, $\frac{d\beta}{dx}$, $\frac{d\gamma}{dx}$ deviennent infinis et g , h , β , γ deviennent discontinus, mais non f et α .

Les composantes normales de la force magnétique et du déplacement restent donc toujours continues, et seules les composantes tangentielles sont discontinues dans le cas étudié précédemment.

A. LIÉNARD,
 Professeur à l'École des Mines
 de Saint-Étienne.

REVUE INDUSTRIELLE ET DES INVENTIONS

Connections pour dynamo génératrice convertissable en survolteur;

Par WOODBRIDGE.

Comme suite à la discussion de M. Woodbridge sur le système survolteur⁽¹⁾, donnons l'exposé d'un brevet qui a été accordé à M. Woodbridge sur une amélioration dans

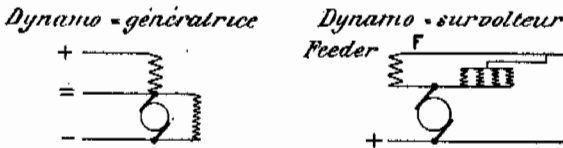


Fig. 1.

le système survolteur pour transmission à longue distance.

Ce brevet contient des procédés de combinaisons d'une génératrice avec les barres du tableau, les feeders, et les commutateurs, qui permettent d'utiliser la dynamo, soit comme génératrice à potentiel constant, soit comme survolteur en série avec un ou plusieurs feeders. Le coût d'établissement d'une telle installation est insignifiant, puisqu'on n'a pas besoin de nouvelle machine.

Quoique chaque cas présente des traits spéciaux qui modifient les détails, le diagramme ci-contre donne une idée générale des connections. On emploie un commutateur spécial à deux directions, et portant sept lames : trois pour les courants intenses, et quatre plus légères pour les courants des champs à fil fin. Dans sa position supérieure, ce commutateur connecte la génératrice comme survolteur entre la barre + et le feeder, le commutateur du feeder étant ouvert ; les champs à fil fin sont alors reliés en parallèle entre eux et avec le champ à gros fil, de telle manière qu'une partie du courant du feeder les traverse, les proportions étant déterminées pour que l'effet combiné des deux sortes de champs donne le rapport voulu entre les volts et les ampères, rapport dépendant de la résistance du feeder ; ainsi, en survoltant on utilise le champ à gros fil, et les champs à fil fin pour produire les mêmes effets qu'avec une machine à excitation en série. Dans sa position inférieure, le commutateur permet d'employer la dynamo comme génératrice à potentiel constant entre les barres + et -.

Ce système a fonctionné à Chester (Pennsylvanie) pendant trois ans, à Pittsburgh (Pennsylvanie) (sur la Second avenue Traction Company) pendant plus de deux ans, et fut

(1) Voir L'Éclairage Électrique du 28 mai 1898.